Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
MASTER I Mathématiques-Informatique 2005–2006

ANALYSE FONCTIONNELLE

EXAMEN $2^{ème}$ session : durée : 4 heures
mercredi 22 février 2006

Exercice 1. (fait en T.D.) (6 points : [1+1] + [1+1,5] + 1,5)
Soit H un espace de Hilbert et $T\colon H \to H$ une application linéaire continue de norme $\|T\| \leqslant 1$.
1) a) Pour tout $x \in H$, montrer que $Tx = x$ si et seulement si $\big(Tx \mid x\big) = \|x\|^2$ (*utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz*).
b) En déduire que $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.
2) a) Montrer que pour tout opérateur S sur H, on a $[\mathrm{Im}\,(S)]^\perp = \ker(S^*)$.
b) En déduire que $H = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $T_n = \dfrac{1}{n+1}(I + T + \cdots + T^n)$. Pour tout $x \in H$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = P(x)$, où P est la projection orthogonale sur $\ker(I-T)$ (*on considèrera successivement les cas* $x \in \ker(I-T)$, $x \in \mathrm{Im}\,(I-T)$, *et* $x \in \overline{\mathrm{Im}\,(I-T)}$).

Exercice 2. (3 points : 1 + [1+1])
Soit H un espace de Hilbert séparable, et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H.
1) Montrer que la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0.
2) On suppose qu'il existe une distance d sur H définissant la topologie faible.
a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe $x_k \in H$ tel que $\|x_k\| = k$ et $d(0, x_k) \leqslant 1/k$ (*utiliser la question précédente*).
b) Montrer que c'est impossible (*on remarquera que la suite* $(x_k)_k$ *converge faiblement vers* 0).

Exercice 3. (2 points)
Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré et soit $\varphi\colon S \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que $\varphi f \in L^2(m)$ pour toute $f \in L^2(m)$.
Montrer que l'application linéaire $M_\varphi\colon L^2(m) \to L^2(m)$ définie par $M_\varphi(f) = \varphi f$ est continue (*utiliser le Théorème du graphe fermé*).

T.S.V.P. ⟶

Exercice 4. (6 points : [1,5+1] + [1,5+1+1])
1) Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction <u>impaire</u> de période 1 définie par $h(t) = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/4$ et $h(t) = 1/2 - t$ pour $1/4 \leqslant t \leqslant 1/2$.

a) Calculer les coefficients de Fourier $c_n = \hat{h}(n)$ de h.

b) Montrer que la mesure $\nu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_n$ (où δ_n est la mesure de Dirac en n) est bornée et que $h(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi i t x}\, d\nu(x)$.

2) Soit μ une mesure complexe sur $[-1/4, 1/4]$, et pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \int_{-1/4}^{1/4} \mathrm{e}^{-2\pi i t\theta}\, d\mu(\theta).$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(t) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\, d\nu(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En appliquant le a) au cas particulier de $\mu_0 = \frac{1}{2i}(\delta_{1/4} - \delta_{-1/4})$, en déduire que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.

c) En déduire que $|f'(t)| \leqslant \frac{\pi}{2}\|f\|_\infty$.

Exercice 5. (9 points : 2 + [1+3+2+1])
Soit $1 \leqslant p < +\infty$, et A une partie bornée de $L^p(\mathbb{R})$.
1) Montrer que si A est précompacte (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, A peut-être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\leqslant \varepsilon$; *on rappelle que cela équivaut à dire que A est relativement compacte, c'est-à-dire que son adhérence est compacte*), alors :

$$(i)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists R(\varepsilon) > 0\ :\ \int_{|x|>R(\varepsilon)} |f(x)|^p\, dx \leqslant \varepsilon^p\,, \quad \forall f \in A\,;$$
$$(ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \|f_t - f\|_p \leqslant \varepsilon\,, \quad \text{pour } |t| \leqslant \delta(\varepsilon)\,, \quad \forall f \in A.$$

2) Réciproquement, on suppose les conditions (i) et (ii) satisfaites par A. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$[\varphi_\varepsilon(f)](x) = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \int_x^{x+\delta(\varepsilon)} f(u)\, du.$$

a) Montrer que pour toute $f \in L^p(\mathbb{R})$, la fonction $\varphi_\varepsilon(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\{\varphi_\varepsilon(f)_{|[-R(\varepsilon),R(\varepsilon)]}\,;\ f \in A\}$ est précompacte dans $\mathscr{C}\big([-R(\varepsilon), R(\varepsilon)]\big)$.

c) Montrer $\|f - \varphi_\varepsilon(f)\|_p \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in A$.

d) En déduire que A est précompacte dans $L^p(\mathbb{R})$.

* * * * * * * * * * * * * *