Master1 de Mathématiques. Université d'Artois.
04/12/07. Durée 1h15

D.S. Analyse Fonctionnelle 2

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. (9 points=3+(1,5+2,5+2))

1) Enoncer le théorème de Banach-Steinhaus.

2) On fixe $p \geq 1$. On suppose que la suite de complexes $c = (c_n)_{n\geq 0}$ vérifie:

$$\text{pour tout } a \in \ell^p, \text{ la série } \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n \text{ converge.}$$

a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit $T_N : \ell^p \to \mathbb{C}$ par $T_N(a) = \sum_{n=0}^{N} a_n c_n$.
Justifier que l'on définit bien ainsi une forme linéaire continue sur ℓ^p.

b) Prouver qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $a \in \ell^p$: $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n \right| \leq C\|a\|_p$

c) Trouver à quel espace appartient $c = (c_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 2. (11 points=1,5+2+3+4,5)

Soient X et Y deux espaces de Banach (dont les boules unités ouvertes sont notées $\mathring{B}_X$ et $\mathring{B}_Y$) et T un opérateur de X dans Y.

On considère les assertions suivantes.

i) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y^* \in Y^*$, $\|T^*(y^*)\| \geq \delta\|y^*\|$.

ii) Il existe $\delta > 0$ tel que $\delta\bar{B}_Y \subset \overline{T(\mathring{B}_X)}$.

iii) Il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \mathring{B}_Y \subset T(\mathring{B}_X)$.

iv) T est surjectif.

1) Justifier que iv)$\Rightarrow$ iii) (et donc implique ii).

2) Montrer que iii)$\Rightarrow$ i).

3) Montrer que i)$\Rightarrow$ ii). Indication: soit $y \notin \overline{T(\mathring{B}_X)}$, justifier par le théorème de séparation (Hahn-Banach géométrique) que $\|y\| \geq \delta$.

4) Montrer que ii)$\Rightarrow$ iii). Indication: on raisonne en supposant que $\delta = 1$ et on fixe $y_1 \in \mathring{B}_Y$ ainsi qu'une suite $\varepsilon_n > 0$ vérifiant $\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|$. Construire deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ telles que $\|x_n\| \leq \|y_n\|$, $\|y_n - T(x_n)\| < \varepsilon_n$ et $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$, pour tout $n \geq 1$. Conclure avec $x = \sum_{n\geq 1} x_n$.