Examen - session **1** [1]

VARIABLE COMPLEXE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

<u>Cours.</u> (8 points=2,5+1+1,5+3)

1) Rappeler le théorème de Cauchy local et la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes. En déduire que si une suite de fonctions holomorphes (f_n) converge uniformément sur tout compact (sur un ouvert Ω) vers f alors f est holomorphe sur Ω, et que la suite des dérivées $\left(f_n^{(p)}\right)$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(p)}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2) Énoncer le principe du module constant pour les fonctions holomorphes.

3) Montrer que la série $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ est bien définie pour $z \in \mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 1\}$ et que ζ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_1$.

4) a) Enoncer le théorème des résidus.

b) En utilisant le théorème des résidus, calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\, dx$.

<u>Exercice 1</u> (3 points)

Soient f et g deux fonctions holomorphes, ne s'annulant jamais, sur le disque ouvert $D(0,R)$ où $R > 1$. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour $|z| = 1$.

1) On veut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, de module 1, tel que $f = \lambda g$ sur $D(0,R)$.

(i) Montrer que $|f(z)| = |g(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$.

(Indication: on pourra commencer par considérer f/g.)

(ii) Conclure.

2) Donner un contre-exemple (simple) si on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas.

<u>Exercice 2</u> (2 points)

Soient Ω un ouvert connexe (non vide) de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. On suppose qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $f(z)^N \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que f est constante.

<u>Exercice 3</u> (1,5 point)

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $g(z) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{tz}\, dt$ est bien définie pour $z \in \mathbb{C}$ et que g est une fonction entière.

[1] Corrigé en ligne le 3 au soir

Exercice 4 (6 points)

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{(x+1)(x+3)}\, dx$. Justifier l'existence de I.

On définit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ et on note log la détermination du logarithme holomorphe sur Ω telle que $\log(i) = \dfrac{\pi}{2}$; ainsi que la fonction $f(z) = \dfrac{\big(\log(z)\big)^3}{(z+1)(z+3)}$, méromorphe sur Ω.

a) De quelle détermination du log s'agit-il (elle est associée à quelle détermination de l'argument) ?

b) Préciser les pôles de f avec leur ordre de multiplicité, puis calculer le résidu en chaque pôle de f.

c) En considérant le lacet C_ε ci-dessous (où $1/4 > \varepsilon > 0$) et en appliquant le théorème des résidus puis en passant à la limite sur ε, calculer I.