Examen - session **2**

VARIABLE COMPLEXE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (7 points=1+1+5)

1) Rappeler les équations de Cauchy-Riemann.

2) Énoncer le principe du module constant pour les fonctions holomorphes.

3) a) Enoncer le théorème de l'argument (qui compte le nombre de zéros et de pôles).

b) Enoncer le théorème de Rouché.

c) Démontrer le théorème de Rouché

Indication: considérer h le quotient adéquat des deux fonctions impliquées dans le théorème puis utiliser un argument d'indice ainsi que le théorème de l'argument.

d) Application. Montrer que $P(z) = z^4 + 6z + 3$ a 4 racines dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 2 (*Indication: on pourra faire intervenir* $Q(z) = z^4$)

Exercice 1 (3 points)

Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe sur $\mathbb{D}$.

1) On suppose que f est nulle sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. Montrer que f est nulle.

2) On suppose que f est nulle sur le demi-cercle supérieur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ et } Im(z) \geqslant 0\}$. Montrer que f est nulle. *Indication: on pourra considérer* $\widetilde{f}(z) = f(z)f(-z)$.

Exercice 2 (3 points)

1) Rappeler le théorème de l'application ouverte (pour les fonctions holomorphes).

2) Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. On suppose que $\varphi(0) = 0$.
On veut montrer:

$$(*) \qquad \text{Pour tout } \eta \in]0,1[, \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } |z| \geqslant \eta \Longrightarrow |\varphi(z)| \geqslant r.$$

On fixe $\eta \in]0,1[$.

a) Justifier qu'il existe $\rho > 0$ tel que: $\forall w \in \mathbb{C}$ avec $|w| < \rho$, on a $w = \varphi(s)$ pour au moins un complexe s vérifiant $|s| < \eta$.

b) Conclure.

Exercice (2 points)

Montrer que $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

Exercice (5 points)

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(9+x^2)^2}\, dx$.

1) Justifier l'existence de I.

2) On définit $\Omega = \mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-)$ et on considère la détermination du log holomorphe sur Ω ainsi que la fonction $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(9+z^2)^2}$, méromorphe sur Ω.

En considérant le lacet ci-dessous (où $R > 3 > \varepsilon > 0$) et en appliquant le théorème des résidus (que l'on rappellera) puis en passant à la limite sur R et ε, calculer I.