VARIABLE COMPLEXE - Examen session **1**

Éléments de correction

Exercice 1. cf T.D.

Exercice 2

1) La fonction $z \in U \longmapsto g(z) = z^p\big(f(z)\big)^q$ est holormophe (car p et q sont des entiers !). La fonction g est continue sur le compact $C \subset U$. D'après le principe du maximum; on a

$$\sup_{z\in C}|g(z)| = \sup_{z\in\partial C}|g(z)| = \max\big(\sup_{|z|=r}|g(z)|; \sup_{|z|=R}|g(z)|\big).$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = \rho$, on a $|z|^p\big|f(z)\big|^q = |g(z)| \leqslant \max\big(r^pM(r)^q; R^pM(R)^q\big)$. Donc

$$\rho^{\frac{p}{q}}\big|f(z)\big| \leqslant \max\Big(r^{\frac{p}{q}}M(r); R^{\frac{p}{q}}M(R)\Big)$$

En passant au sup sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ, on obtient

$$\rho^{\frac{p}{q}}M(\rho) \leqslant \max\Big(r^{\frac{p}{q}}M(r); R^{\frac{p}{q}}M(R)\Big)$$

2) Soit $\alpha = \dfrac{\ln(M(R)) - \ln(M(r))}{\ln(r) - \ln(R)}$: c'est la limite d'une suite de rationnels (s_n) (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), or on a d'après 1.

$$\forall n\,, \qquad \rho^{s_n}M(\rho) \leqslant \max\Big(r^{s_n}M(r); R^{s_n}M(R)\Big)$$

donc par passage à la limite $\rho^{\alpha}M(\rho) \leqslant \max\Big(r^{\alpha}M(r); R^{\alpha}M(R)\Big)$ d'où le résultat en réarrangeant.

3) Si $M(r) = M(R) = 0$ alors la question 1 avec $p = q = 1$ (par exemple) donne tout de suite le résultat.

Si l'un seulement est nul: disons m(r)=0 et $M(R) > 0$ pour fixer les idées. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, M(R)[$, on considère la fonction $\tilde{f} = f + \varepsilon$. Puisque f et nulle sur le cercle de centre 0 et de rayon r, $\tilde{f} = \varepsilon$ sur ce cercle. Dans la suite, on note $\tilde{M}(t) = \sup\{|\tilde{f}(z)|;\ |z| = t\}$. On a donc $\tilde{M}(r) = \varepsilon > 0$ et $\tilde{M}(R) \geqslant M(R) - \varepsilon > 0$. D'après 2., on a pour tout z sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ:

$$|f(z) + \varepsilon| \leqslant \tilde{M}(\rho) \leqslant \varepsilon^{\frac{\ln(R)-\ln(\rho)}{\ln(R)-\ln(r)}}.(M(R) + \varepsilon)^{\frac{\ln(\rho)-\ln(r)}{\ln(R)-\ln(r)}}.$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$, on a $f(z) = 0$ donc $M(\rho) = 0$. Ainsi (H) est encore vrai.

Exercice 3. cf T.D.

Exercice 4

1) La fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(1+x^2)^2(4+x^2)}$ est continue donc localement intégrable.

Au voisinage de $+\infty$: on a $f(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{x^6} = o(1/x^5)$ donc l'intégrale converge à la borne $+\infty$ d'après Riemann $(5 > 1)$.

Au voisinage de 0^+: on a $f(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{4} = o(1/\sqrt{x})$ donc l'intégrale converge à la borne 0 d'après Riemann $(1/2 < 1)$.

Le suite de l'exercice se traite essentiellement comme dans le CC2: ici i est pôle double de f et $2i$ est pôle simple.

On trouve $Res(f, 2i) = \dfrac{\ln(2) + i\frac{\pi}{2}}{36i}$ et $Res(f, i) = u'(i)$ avec $u(z) = \dfrac{\log(z)}{(z+i)^2(4+z^2)}$ ·

Ainsi $Res(f, i) = \dfrac{\pi}{72} + \dfrac{i}{12}$ · Et au final on trouve $I = \dfrac{\pi}{36}\big(\ln(2) - 3\big)$ ·