Examen - session **1** [1]

VARIABLE COMPLEXE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (6 points=3+1+1+1)

1) Soit *Log* la détermination principale du logarithme.

a) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, rappeler la formule exprimant $Log(z)$ en fonction de son module et de son argument.

b) Pour $z = x + iy$ (x, y réels), expliciter cette formule en fonction de x et y. En déduire que *Log* est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ en utilisant les équations de Cauchy-Riemann.

2) Énoncer le principe du module constant pour les fonctions holomorphes.

3) Enoncer le théorème de l'argument (qui compte le nombre de zéros et de pôles).

4) Enoncer le théorème de Rouché.

Exercice 1 (4 points=1+1+2)

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On suppose que $|\varphi|$ a une limite de module 1 en tout point de $\partial\mathbb{D}$ et que φ a au moins un zéro dans $\mathbb{D}$. On veut montrer que φ est surjective.

1) On définit pour $r \in]0, 1[$, la quantité $m(r) = \inf\{|\varphi(z)|\,;\ |z| = r\}$.

a) Justifier que $m(r)$ est bien défini, à valeurs dans $[0, 1]$ et que $m(r) = \min\{|\varphi(z)|\,;\ |z| = r\}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{r\to 1^-} m(r) = 1$.

2) Conclure. *Indication: étant donné $w \in \mathbb{D}$, choisir r pour que $m(r) > |w|$.*

Exercice 2 (4 points=2+1+1)

Soient $0 < r < R$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant la couronne $C = \{z \in \mathbb{C}|\ r \leqslant |z| \leqslant R\}$.
On considère $f \in \mathscr{H}(U)$ et on pose $M(\rho) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = \rho\}$, où $\rho \in [r, R]$.

1) Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\rho^{\frac{p}{q}} M(\rho) \leqslant \max\{r^{\frac{p}{q}} M(r), R^{\frac{p}{q}} M(R)\}$.
Indication : on pourra faire intervenir $g(z) = z^p\big(f(z)\big)^q$.

2) On suppose que $M(r)$ et $M(R)$ sont non nuls.
En considérant $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$, montrer que

$$(H) \qquad M(\rho) \leqslant M(r)^{\frac{\ln(R)-\ln(\rho)}{\ln(R)-\ln(r)}}.M(R)^{\frac{\ln(\rho)-\ln(r)}{\ln(R)-\ln(r)}}.$$

3) On suppose que $M(r) = 0$ ou $M(R) = 0$. Est-ce que (H) est encore vrai ?

[1] Corrigé en ligne le 15 au soir

Exercice 3 (3 points=1+(1+1))

1) Rappeler le théorème de l'application ouverte (pour les fonctions holomorphes).

2) Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. On suppose que $\varphi(0) = 0$.
On veut montrer:

$$(*) \qquad \text{Pour tout } \eta \in]0,1[, \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } |z| \geqslant \eta \Longrightarrow |\varphi(z)| \geqslant r.$$

On fixe $\eta \in]0,1[$.

a) Justifier qu'il existe $\rho > 0$ tel que: $\forall w \in \mathbb{C}$ avec $|w| < \rho$, on a $w = \varphi(s)$ pour au moins un complexe s vérifiant $|s| < \eta$.

b) Conclure.

Exercice 4 (5,5 points=0,5+(0,5+1,5+3))

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2(4+x^2)}\, dx$.

1) Justifier l'existence de I.

2) On définit $\Omega = \mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-)$ et on considère la détermination du log holomorphe sur Ω ainsi que la fonction $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(1+z^2)^2(4+z^2)}$, méromorphe sur Ω.

a) Préciser les pôles de f et leur ordre de multiplicité.

b) Calculer le résidu en chaque pôle de f.

c) En considérant le lacet ci-dessous (où $R > 2 > 1 > \varepsilon > 0$) et en appliquant le théorème des résidus puis en passant à la limite sur R et ε, calculer I.