Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.
20/06/2017.

EXAMEN session **2**

VARIABLE COMPLEXE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Dans tout le sujet, le disque unité ouvert du plan complexe est noté $\mathbb{D}$.

Cours. (10 points=1+2,5+1,5+2,5+2,5)

1) Enoncer le théorème de l'application ouverte.

2) Énoncer et démontrer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral.

3) (i) Rappeler la définition de la détermination principale du logarithme, que l'on notera *Log*.

(ii) Justifier qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$, que l'on précisera, telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on ait

$$Log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

(iii) Application: déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2i\pi}{n}\right)^{n^2}$.

4) Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx$ et calculer I en utilisant la méthode des résidus.

5) Soit $f_n(z) = \dfrac{z}{(z-n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega$ où $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$.

(i) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

(ii) Montrer que $z \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z}{(z-n)^2}$ définit une fonction holomorphe sur Ω. Quelle est la nature de la singularité n (où $n \in \mathbb{N}$) ?

Exercice 1 (2 points)

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
On suppose que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $\quad f(z) \cdot g(z) = 0$.

1) On suppose dans cette question qu'il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $f(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe un ouvert (non vide) $\omega \subset \mathbb{D}$ tel que $g_{|\omega} = 0$.

2) Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 2. (3 points)

Soient f et g deux fonctions holomorphes, ne s'annulant jamais, sur le disque ouvert $D(0, R)$ où $R > 1$. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour $|z| = 1$.

1) On veut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, de module 1, tel que $f = \lambda g$ sur $D(0, R)$.

(i) Montrer que $|f(z)| = |g(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$. *(Indication: on pourra considérer f/g et g/f.)*

(ii) Conclure.

2) Donner un contre-exemple (simple) si on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas.

Exercice 3. (5 points)

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x} \sin(\sin x)}{x}\, dx$.

Indication: considérer la fonction $z \longmapsto \dfrac{\exp\left(e^{iz}\right)}{z}$ et intégrer sur un demi-disque de grand rayon R dont on aura évidé le centre 0 d'ε (avec $0 < \varepsilon < R$) comme sur le schéma ci dessous. (rq: ne pas justifier a priori la convergence de l'intégrale, elle sera assurée par la méthode de calcul)