Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.
12/05/2017.

EXAMEN session **1**

VARIABLE COMPLEXE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Dans tout le sujet, le disque unité ouvert du plan complexe est noté $\mathbb{D}$.

Cours. (13 points=(1+1)+(2+0,5)+(0,5+1+1)+3,5+(1,5+1))

1) (i) Enoncer le théorème de Rouché.

(ii) Application: montrer que le polynôme $P(z) = 1 + 3z^7 + z^{42}$ a exactement 7 racines distinctes dans $\mathbb{D}$. (*Indication:* $P(z) = (1 + z^{42}) + 3z^7$).

2) Soit $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. On suppose que $\varphi(0) = 0$.

(i) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|\varphi(z)| \leqslant |z|$.
(*Indication: on pourra considérer* $z \mapsto \varphi(z)/z$).

(ii) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ tel que $|\varphi(a)| = |a|$. Que vaut $\varphi(z)$ (pour $z \in \mathbb{D}$) ?

3) (i) Rappeler la définition de la détermination principale du logarithme, que l'on notera *Log*.

(ii) Justifier qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$, que l'on précisera, telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on ait

$$Log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

(iii) Application: déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2i\pi}{n}\right)^{n^2}$.

4) Soit n un entier naturel non nul.
Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx$ et calculer I_n en utilisant la méthode des résidus.

5) Soit $g_n(z) = \dfrac{n^2 - 1 - n^2 z}{n^2 - (n^2-1)z}$ pour $n \geqslant 1$ (entier) et $z \in \mathbb{D}$.

(i) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (g_n - 1)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.

(ii) En déduire que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 1} g_n$ définit une fonction holomorphe G sur $\mathbb{D}$. Quels sont les zéros de G ?

Exercice 1 (4,5 points=0,5+1+1,5+0,5+1)

Soit $a \in \mathbb{D}$. On considère la fonction $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}\cdot$

1) (i) Montrer que $\varphi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$.

(ii) En utilisant le principe du maximum, justifier que $\varphi_a(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

(iii) Identifier $\varphi_a \circ \varphi_a$ puis montrer que $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2) On considère une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$ à valeurs dans $\mathbb{D}$.

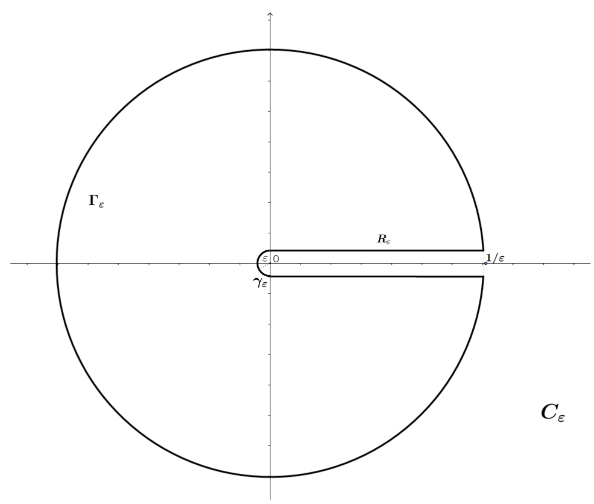
(i) Soit $g = \varphi_{f(a)} \circ f \circ \varphi_a$: justifier que g est une fonction holomorphe qui envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Que vaut $g(0)$?

(ii) Montrer pour tous $z, a \in \mathbb{D}$: $\left|\dfrac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leqslant \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$.

Exercice 2. (6 points=1,5+1+1,5+1+1)

On s'intéresse à $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)(x+2)}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{(x+1)(x+2)}\,dx$ (qui sont bien définies)

Dans la suite log est la détermination du logarithme associée à la détermination de l'argument dans $]0, 2\pi[$; i.e. on exclut le demi-axe des abscisses positives : $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} |\, Re(z) \geqslant 0\}$. Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on note γ_ε le demi-cercle de centre O, de rayon ε situé dans le demi-plan gauche, orienté négativement. On note $R_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^{-2} - \varepsilon^2}$ et Γ_ε l'arc de cercle de centre O, de rayon ε^{-1}, orienté positivement, obtenu en enlevant le "petit arc autour du point $(\varepsilon^{-1}, 0)$". Enfin, on note C_ε le lacet obtenu en juxtaposant l'arc Γ_ε, le segment $[R_\varepsilon, 0] - i\varepsilon$, l'arc γ_ε et le segment $[0, R_\varepsilon] + i\varepsilon$. (voir dessin ci contre)



On pose $f(z) = \dfrac{(\log(z))^2}{(z+1)(z+2)}$.

1) Montrer que l'on définit ainsi une fonction f holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1,-2\}$. Calculer le résidu en -1 et le résidu en -2.

2) Justifier que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0$ et que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[0,R_\varepsilon]+i\varepsilon} f(z)dz = J$.

4) Que vaut $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[0,R_\varepsilon]-i\varepsilon} f(z)dz$? *On pourra donner le résultat sans redonner toutes les justifications d'interversion faites dans la question précédente, mais en expliquant simplement le calcul effectué au niveau du Log.*

5) Calculer I.