Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Applications. [*]

Nous allons présenter ici la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Définition 1 *On rappelle que $G \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ si*

(i) $0 \in G$

(ii) $\forall x, y \in G,\ x - y \in G$

Remarque : dans (ii), on peut écrire aussi (le vérifier !) :
$\forall x \in G,\ -x \in G$ et $\forall x, y \in G,\ x + y \in G$.

Exemples immédiats :
— $\mathbb{R}$ lui-même. Le singleton $\{0\}$.
— Toute partie $a\mathbb{Z} = \{ak \mid \ k \in \mathbb{Z}\}$ où $a \in \mathbb{R}$.
— L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Le résultat principal est la description suivante des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 *Soit $H \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On a l'alternative :*

(a) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
OU
(b) H est dense dans $\mathbb{R}$.

Proof. On considère que H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ tel que $H \neq \{0\}$ (sinon on est dans le cas (a) et il suffit de choisir $\alpha = 0$).

On commence par noter que $\mathcal{E} = \{x > 0 |\ x \in H\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. En effet, il existe $h \in H$ avec $h \neq 0$. Si $h > 0$ alors $h \in \mathcal{E}$. Sinon $-h \in \mathcal{E}$.

Ainsi $\mathcal{E}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne inférieure

$$\alpha = \inf\{x > 0 |\ x \in H\} = \inf \mathcal{E}$$

Les deux conclusions alternatives du théorème résultent des deux possibilités : $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

• Supposons que $\alpha > 0$.

En fait $\alpha \in H$. Sinon, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in \mathcal{E}$ avec $\alpha < x < 2\alpha$. De même il existe $y \in \mathcal{E}$ avec $\alpha < y < x$. Mais alors $0 < x - y < \alpha$ et $x - y \in H$ (donc $x - y \in \mathcal{E}$). Ceci contredit la définition de α.

Dès lors, par définition des sous-groupes additifs, on a $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.

Réciproquement, soit $h \in H$. Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n\alpha, (n+1)\alpha\right[$, il existe $\delta \in [0, \alpha[$

[*] *Pascal Lefèvre*

et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $h = n\alpha + \delta$. Comme $n\alpha \in H$, on a $\delta = h - n\alpha \in H \cap \mathbb{R}^+$. Ainsi, si $\delta > 0$, on aurait à la fois $\delta \in \mathcal{E}$ et $\delta < \alpha$, ce qui est contradictoire. Donc $\delta = 0$ et $h = n\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$. On en déduit que $\alpha\mathbb{Z} = H$.

• Supposons que $\alpha = 0$. Fixons un intervalle non trivial (ouvert) arbitraire $I =]u, v[$ (avec $u < v$). Posons $\varepsilon = v - u > 0$. Par définition de la borne inférieure α (qui vaut 0 ici), il existe $h \in]0, \varepsilon[\cap H$. Considérons maintenant $m \in \mathbb{Z}$ tel que $(m-1)h \leq u < mh$. On a en fait d'une part $mh \in H$ et d'autre part

$$u < mh = (m-1)h + h \leq u + h < u + \varepsilon = v.$$

Donc $mh \in I \cap H \neq \emptyset$ et H est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Applications.

Proposition 2 *Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On a*

$$\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bm |\, n, m \in \mathbb{Z}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.$$

Proof. Clairement $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Ainsi d'après le théorème 1, il est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.

• Supposons que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Si on avait $H = \alpha\mathbb{Z}$, alors $a \in H$ doit s'écrire $a = \alpha q$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $b \in H$ doit s'écrire aussi $b = \alpha p$ où $p \in \mathbb{Z}$. Comme a et b sont non nuls, p, q et α aussi. On a alors $\frac{a}{b} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc H est dense dans $\mathbb{R}$.

• Supposons que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $\frac{a}{b} = \frac{q}{p}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ (non nuls, premiers entre eux). Notons $\alpha = \frac{a}{q} \cdot$ En fait $\alpha = \frac{a}{q} = \frac{b}{p} \cdot$

Soit $h \in H$, on peut écrire $h = an + bm$ où $n, m \in \mathbb{Z}$. Ainsi $h = \alpha(nq + pm) \in \alpha\mathbb{Z}$ donc $H \subset \alpha\mathbb{Z}$.

Réciproquement, comme p et q sont premiers entre eux, on peut trouver (Bézout) $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $sp + tq = 1$. Ainsi $\alpha = sp\alpha + tq\alpha = at + bs \in H$. Donc $\alpha\mathbb{Z} \subset H$ car H est sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. ■

On en déduit immédiatement :

Corollaire 3 *On a*

1. *Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\pi}{\theta} \notin \mathbb{Q}$, alors $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *En particulier, en admettant que π est irrationnel, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

On peut aussi obtenir

Corollaire 4 $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1, 1]$.

Proof. $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n + 2\pi m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ est l'image par la fonction continue cos de l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

Ainsi $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. ■

Le même raisonnement montre que

Corollaire 5 $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $[-1,1]$.

Toutefois, on a mieux :

Proposition 6 $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1,1]$.

C'est une conséquence du raisonnement précédent et du lemme suivant qui affine le corollaire 3 :

Lemme 7 *Soit* $\theta \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\frac{\pi}{\theta} \notin \mathbb{Q}$, *alors* $\theta\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z} = \{n\theta+2\pi m | \, n \in \mathbb{N}\,, \; m \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Proof. Soit $]u,v[$ un intervalle ouvert non trivial de $\mathbb{R}$ avec $\varepsilon = v-u > 0$. Si $0 \in]u,v[$, il n'y a rien à faire. Sinon :

• Supposons que $u > 0$. Il suffit alors de montrer que $]0,\varepsilon[\cap \big(\theta\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}\big) \neq \emptyset$ (disons contient x) car alors on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $kx \leq u < (k+1)x$. On a en fait d'une part $(k+1)x \in \theta\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}$ et d'autre part $u < (k+1)x = kx+x < u+\varepsilon = v$.

Justifions donc que $]0,\varepsilon[\cap \big(\theta\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}\big) \neq \emptyset$. On sait d'après le corollaire 3 qu' il existe une infinité d'éléments de la forme $n\theta+2\pi m$ dans $]0,\varepsilon[$ où $n,m \in \mathbb{Z}$. De deux choses l'une : soit on en trouve un tel que $n \in \mathbb{N}$ et on a fini, soit ils vérifient tous $n < 0$. Mais alors, en en choisissant un, disons $x = n\theta+2\pi m$ (où $n < 0$), on peut encore en trouver à nouveau une infinité dans $]0,x[$, de la forme $p\theta+2\pi q \in]0,\varepsilon[$ avec $p,q \in \mathbb{Z}$ et $p < 0$ (puisqu'on vient de dire qu'il n'y en a pas avec $p \in \mathbb{N}$). Or pour chaque entier $p \in]n,0[$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $p\theta+2\pi\mathbb{Z}$ qui appartiennent aussi à $]0,x[$: on en conclut qu'il existe nécessairement un élément $x' \in]0,x[$ de la forme $p\theta+2\pi q \in]0,\varepsilon[$ avec $p,q \in \mathbb{Z}$ et $p \leq n$. Dès lors, $x-x' \in]0,\varepsilon[$ et s'écrit $x-x' = (n-p)\theta+2\pi(m-q)$.

• Supposons que $v < 0$. On reprend le raisonnement précédent avec $]-\varepsilon,0[$ et on conclut de la même façon. ■