Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2018-2019.
21/12/2018.

EXAMEN **1**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

<u>Cours.</u> (4,5 points)

1) Enoncer le théorème sur le produit de deux séries numériques.

2) Enoncer et démontrer le test d'Abel-Dirichlet dans sa version pour les intégrales:
Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *telles que ... Alors* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \ldots$

<u>Exercice 1</u> (2 points)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_A^{2A} \frac{f(x)}{x}\,dx = \ell \ln(2)$.

<u>Exercice 2</u> (2,5 points=1+1,5)

Déterminer pour chacune des séries suivantes si elle converge ou diverge:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2+\ln(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) $v_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 3</u> (4 points=1+1+2)

Déterminer pour chacune des intégrales suivantes si elle converge ou diverge:

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(t^2\right)}{t^3+7t^2+5}\,dt$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x^2)}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 4 (4,5 points=1,5+3)

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{n+\ln(n)}{n^2+1}\right) z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 2$.

1) On suppose dans cette question que $|z| \neq 1$.

a) Justifier que si $|z| > 1$, la série diverge.

b) Justifier que si $|z| < 1$, la série est absolument convergente.

2) On suppose dans cette question que $|z| = 1$.

a) Montrer que la série n'est pas absolument convergente. Pour $z = 1$, quelle est la nature de la série ?

b) On suppose désormais que $|z| = 1$ avec $z \neq 1$.

(i) Justifier que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{N} z^k\right)_{N \geqslant 2}$ est bornée.

(ii) En déduire que la série de terme général u_n converge dans ce cas.

Exercice 5 (1,5 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier la convergence et calculer: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$

Exercice 6 (3 points=0,5+2,5)

Pour s réel, on considère $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1) Rappeler pour quels réels s, la série de terme général $\dfrac{1}{n^s}$ converge (et donc la quantité $\zeta(s)$ est bien définie).

2) On veut montrer que $\zeta(s) \sim \dfrac{1}{s-1}$ lorsque $s \to 1^+$.

a) Montrer que, pour $s > 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx$$

b) Conclure.