Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.
08/06/2017.

EXAMEN **2**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

<u>Cours.</u> (6,5 points=1+1,5+4)

1) Enoncer le théorème de groupement par paquets pour les séries.

2) Préciser (et justifier) le domaine de définition de la fonction Γ: $\quad \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt.$

3) a) Enoncer le test d'Abel dans sa version pour les séries:

Soient $\big(a_n\big)_{n\geqslant 0}$ *une suite de complexes et* $\big(b_n\big)_{n\geqslant 0}$ *une suite de réels telles que* ... *Alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ ...

b) On veut démontrer cet énoncé.

(i) Montrer que pour tous entiers $q > p \geqslant 1$ on a

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = A_q b_{q+1} - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q} A_n (b_n - b_{n+1}) \qquad \text{où } A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

(ii) Conclure.

(iii) *Application:* justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{in}}{n+1}$.

Est-elle absolument convergente ?

<u>Exercice 1</u> (4 points)

Déterminer pour chacune des séries suivantes si elle converge ou diverge:

1) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ où $n \geqslant 1$.

2) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n + \sqrt{\pi})}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+3/n}}$ où $n \geqslant 1$.

4) $u_n = e^{n^3}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^5}$ où $n \geqslant 1$.

Exercice 2 (3 points)

Déterminer pour chacune des intégrales suivantes si elle converge ou diverge:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^3+t^{2015}}{1+t+2016\,t^{2017}}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan(x)}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos(x)}{x}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{sin(\pi x)}{\big(x(1-x)\big)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

Exercice 3 (3 points)

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(9x^2+6x+2)^2}\,dx.$

Exercice 4 (6,5 points=0,5+1+1,5+1+2,5)

Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour $n \geqslant 1$ entier.

1) Justifier que R_n est bien défini.

2) Quel est le signe de R_n ? (et pourquoi?) Justifier que la suite $\big(R_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

3) Pour $N > n \geqslant 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\,dt.$

4) En déduire que pour $n \geqslant 1$, on a $R_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt.$

5) En déduire la convergence de la série de terme général R_n et calculer la somme de cette série.