Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.

EXAMEN 1 – Eléments de correction

SÉRIES - INTÉGRALES

Cours. Exercices 1-4-5

Voir TD...

Exercice 2

1) La fonction $t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1-t+t^2}{1+t+7t^{\frac{7}{2}}}$ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{1-t+t^2}{1+t+7t^{\frac{7}{2}}} \sim \frac{1}{7t^{\frac{3}{2}}}$$

or $\dfrac{3}{2} > 1$ donc l'intégrale converge d'après le critère de Riemann.

2) La fonction $x \in]0,1] \longmapsto \dfrac{x}{(\ln(x+1))^{\frac{3}{2}}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de 0^+, on a $\dfrac{x}{(\ln(x+1))^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ or $\dfrac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale converge d'après le critère de Riemann.

3) La fonction $x \in]0,+\infty[\longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0^+, on a $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ or $\dfrac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale converge en 0 d'après le critère de Riemann ou encore $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (par exemple) est bien définie.

Pour la convergence de l'intégrale entre 1 et $+\infty$, on utilise le test d'Abel. La fonction $x \in [1,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et de limite nulle en l'infini. Par ailleurs on a pour tout $A > 1$,

$$\Big| \int_1^A \cos(x)\,dx \Big| = |\sin(A) - \sin(1)|$$

qui est donc borné par 2 (indépendant de A).

Le test d'Abel s'applique et l'intégrale converge.

4) La fonction $x \in \left]0,1\right[\cup \left]1, \dfrac{3}{2}\right] \longmapsto \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{|x-1|}\right)} \in \mathbb{R}^+$ est continue donc localement intégrable sur $]0,1[$ d'une part et $\left]1, \dfrac{3}{2}\right]$ d'autre part.

Au voisinage de 0^+, on a $\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{|x-1|}\right)} = \dfrac{-1}{\ln(1-x)} \sim \dfrac{1}{x}$ donc l'intégrale diverge en 0 d'après le critère de Riemann.

L'intégrale diverge donc. On pourrait aussi regarder ce qui se passe en 1 et justifier qu'en 1 l'intégrale converge (via un prolongement par continuité, ou par critère de Bertrand par exemple).

<u>Exercice 3</u>

La fonction $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\longmapsto \dfrac{1}{(2+4x+4x^2)^2}$ est continue donc localement intégrable.
Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{1}{(2+4x+4x^2)^2} \sim \frac{1}{16x^4}$$

or $4 > 1$ donc l'intégrale converge d'après le critère de Riemann.

On suit la méthode habituelle: on fait apparaitre la forme canonique: $2 + 4x + 4x^2 = (2x+1)^2 + 1$ et on fait donc le changement de variable $u = 2x + 1$. Ainsi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(2+4x+4x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^2}\, du.$$

On est ramené à une intégrale étudiée en cours: soit on utilise la formule de récurrence, soit on rejustifie (via une I.P.P.) que

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^2}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du + \left[\frac{u}{1+u^2}\right]_0^{+\infty} = \Big[\arctan(u)\Big]_0^{+\infty} + 0 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(2+4x+4x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{8}\cdot$