

EXAMEN 1

SÉRIES - INTÉGRALES

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours. (4,5 points)

1) Énoncer le théorème sur le produit de deux séries numériques.

2) Énoncer et démontrer le test d'Abel dans sa version pour les intégrales:

Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que ... Alors $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx \dots$

Exercice 1 (4 points)

Déterminer pour chacune des séries suivantes si elle converge ou diverge:

1)(i) $a_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $b_n = \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) $u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$ où $n \geq 1$.

3) $u_n = e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}$ où $n \geq 1$ et $a > 0$.

Exercice 2 (4 points)

Déterminer pour chacune des intégrales suivantes si elle converge ou diverge:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1-t+t^2}{1+t+7t^{\frac{7}{2}}} dt$

2) $\int_0^1 \frac{x}{(\ln(x+1))^{\frac{3}{2}}} dx$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$

4) $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{|x-1|}\right)} dx$

Exercice 3 (3 points)

Justifier l'existence et calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(2+4x+4x^2)^2} dx$

Exercice 4 (3,5 points)

Soit $a > 0$. On s'intéresse à $\Phi(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

- 1) Justifier que Φ est définie sur $]0, +\infty[$.
- 2) A l'aide d'une comparaison série-intégrale, justifier l'existence de $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Phi(a)$ et calculer sa valeur.

Exercice 5 (5 points)

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

- a) On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe (on la note ℓ). Montrer que nécessairement $\ell = 0$.
- b) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$.
- c) On suppose dans cette question que f est uniformément continue. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.