Licence de Mathématiques.
Université d'Artois. 2015-2016.
07/06/2016. Durée 3h

EXAMEN *session* **2**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (4 points)

1) Enoncer le théorème sur le produit de deux séries numériques.

2) Soit f une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Exercice 1 (3,5 points points)

Déterminer pour chacune des séries suivantes (dont on donne le terme général u_n) si elle converge ou diverge:

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{2n^2 - 10}{5n^3 + n + 1}\cdot$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + 2}\cdot$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(\cos(n))\sqrt{n} + n - 3}{n^2 + n + 1}\cdot$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}\cdot$

Exercice 2 (3 points)

Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-2}{1+x+x^3}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

Exercice 5 (2,5 points)

On s'intéresse à $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\, dt$ où $n \geqslant 1$ est un entier.

1) Justifier l'existence de I_n pour tout $n \geqslant 1$.

2) Justifier que pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on a $\left(1+t^2\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

3) En déduire la nature de la série de terme général I_n.

Exercice 4 (3,5 points)

1) Justifier la convergence de la série dont le terme général $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ ·

2) Montrer que pour tout $N \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\, dt$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3) Justifier la convergence et calculer la somme de la série dont le terme général u_n est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!\,(k+1)} \,.$$

Exercice 5 (3,5 points)

1) En utilisant le test d'Abel-Dirichlet, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{x}\, dx$ converge.

2) On se demande si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{x}\, dx$ est absolument convergente.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_0 = 1$ et $a_k = \ln\left(k\pi\right)$ lorsque $k \geqslant 1$.

a) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$\int_1^{a_{N+1}} \frac{\left|\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\right|}{x}\, dx \geqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\right|\, dx$$

b) Soit $k \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\right|\, dx$.

c) Conclure.