Licence de Mathématiques.
Université d'Artois. 2015-2016.
18/12/2015. Durée 3h

EXAMEN *session* **1**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (4,5 points)

1) a) Enoncer le test d'Abel pour les séries.

b) Le démontrer.

2) Soit f une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Exercice 1 (4 points)

Déterminer pour chacune des séries suivantes (dont on donne le terme général u_n) si elle converge ou diverge:

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+10}{2n^2+n+2}\cdot$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{n^2\sin(n)+n-3}{n^4+n+1}\cdot$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{8^n (n!)^3}{(3n)!}\cdot$

Exercice 2 (5 points)

1) Déterminer si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ converge ou diverge

2) On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4+t^8}\,dt$

a) Justifier la convergence de I.

b) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{1+t^4+t^8}\,dt$. *Indication: faire un changement de variable du type* $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *pour un α entier bien choisi*

c) En déduire que $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$.

Indication: commencer par remarquer que $I = \dfrac{I+I}{2}$ *puis décomposer en éléments simples. On pourra aussi utiliser que* $1+X^2+X^4 = (1-X+X^2)(1+X+X^2)$

d) Conclure.

Exercice 3 (2,5 points)

Justifier la convergence et calculer la somme de la série dont le terme général u_n est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!\; 2^k}\,.$$

Est-ce une série absolument convergente ?

Exercice 4 (3,5 points)

1) En utilisant le test d'Abel-Dirichlet, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{x^2}\, dx$ converge.

2) On se demande si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{x^2}\, dx$ est absolument convergente.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_0 = 1$ et $a_k = \ln\left(k\pi\right)$ lorsque $k \geqslant 1$.

a) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$\int_1^{a_{N+1}} \frac{\left|\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\right|}{x^2}\, dx \geqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\left(a_{k+1}\right)^2} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\right|\, dx$$

b) Soit $k \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\right|\, dx$.

c) Conclure.

Exercice 5 (4,5 points)

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

a) On suppose dans cette question que $\lim\limits_{+\infty} f(t)$ existe (on la note ℓ).
Montrer que nécessairement $\ell = 0$.

b) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$.

c) On suppose dans cette question que f est uniformément continue.
Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.