Licence de Mathématiques **3**.
2011-2012. Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 2

Marche aléatoire sur une droite

La situation est la suivante: on fixe $p \in]0,1[$ et on place un pion sur le point 0 de la droite (réelle orientée). On le fait bouger d'une unité ou bien à droite avec probabilité p ou bien à gauche avec probabilité $1-p$. On reproduit le procédé à l'infini. Quelle est la probabilité de retourner une infinité de fois au point 0 ?

Partie I. La formule de Stirling faible.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. On considère $u_n = \dfrac{n!}{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{n}}$.

1) Montrer que la série de terme général $\ln\big(u_{n+1}\big) - \ln\big(u_n\big)$ converge.

2) En déduire l'existence de $L > 0$ tel que $n! \sim L.\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{n}$.

Partie II. Le lemme de Borel-Cantelli.

Soient Ω un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $(E_n)_{n\in}$ une suite d'évènements. On rappelle que $\overline{\lim} E_n$ désigne la limite supérieure de cette suite:

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

1) Montrer que $\overline{\lim} E_n = \big\{\omega \in \Omega |\, \omega \in E_k \text{ pour une infinité de } k\big\}$.

On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(E_n)$ converge.

2) Quelle est la monotonie de la suite de terme $A_N = \displaystyle\bigcup_{k\geq N} E_k$?

3) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}\big(A_N\big) \leq \displaystyle\sum_{k\geq N} \mathbb{P}\big(E_k\big)$.

4) En déduire que $\mathbb{P}\big(\overline{\lim} E_n\big) = 0$

Partie III. Préparation et le cas $p \neq 1/2$.

Soient E_n l'évènement: "le pion est en 0 à la n ième étape".

1) Pour l'instant $p \in]0,1[$.

   a) Montrer que E_n est vide si n est impair.

   b) Montrer que $\mathbb{P}(E_{2n}) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$.

   c) Exprimer l'évènement "le pion passe par 0 une infinité de fois" à l'aide des E_k.

2) Conclure sur le problème initial dans le cas $p \neq 1/2$.

Partie IV. Le cas $p = 1/2$.

Pour simplifier, on note dans la suite $u_n = \mathbb{P}\big(E_{2n}\big)$. Noter que $u_0 = 1$.

On notera aussi F_k l'évènement: "le pion *retourne pour la première fois* en 0 à la $2k$ ième étape" et $f_k = \mathbb{P}(F_k)$ (ainsi $f_0 = 0$).

1) Montrer que la série de terme général u_n diverge.

2) Justifier que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_{2n} sachant F_k vaut u_{n-k}:

$$\mathbb{P}_{F_k}\Big(E_{2n}\Big) = \mathbb{P}\Big(E_{2n}/F_k\Big) = u_{n-k}.$$

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.u_{n-k}$.

Pour $x \in [0, 1[$, on pose $U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j$ et $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$.

4) Montrer que les séries entières précédentes ont effectivement un rayon de convergence d'au moins 1.

5) Que vaut $\lim_{x \to 1^-} U(x)$?

6) Montrer que tout $x \in [0, 1[$, on a $U(x) - u_0 = U(x).F(x)$.

7) En déduire $\lim_{x \to 1^-} F(x) = 1$ et la convergence de la série de terme général f_n. Que vaut la somme de cette série ?

8) Justifier que l'évènement: "le pion retourne au moins une fois en 0" a pour probabilité 1 et conclure.

9) Retrouver aussi le résultat du cas $p \neq 1/2$.