Licence de Mathématiques **2**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 3

Autour des valeurs adhérences.

Les deux premières parties sont indépendantes.

Partie I. Limites supérieures/inférieures.

Soit $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

1) (i) Justifier que les suites $S_n = \sup\limits_{k\geq n} u_k$ et $I_n = \inf\limits_{k\geq n} u_k$ sont bien définies et monotones (on précisera la monotonie).

(ii) En déduire que ces deux suites convergent.

On note alors $\overline{\lim} u_k$ la limite de $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite supérieure) et $\underline{\lim} u_k$ la limite de $\big(I_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite inférieure).

2) Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites:

$$\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{et} \qquad \left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}.$$

3) Montrer que la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\underline{\lim} u_k = \overline{\lim} u_k$. Quelle est alors la limite ?

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une sous-suite $\big(u_{n_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente vers ℓ : On dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Montrer que $\underline{\lim} u_k \leq \ell \leq \overline{\lim} u_k$.

5) Montrer que $\overline{\lim} u_k$ est une valeur d'adhérence de la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet que, de même, $\underline{\lim} u_k$ est une valeur d'adhérence de la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) Soient I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $\ell \in I$ est une valeur d'adhérence de la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite de I). Montrer que $f(\ell)$ est une valeur d'adhérence de la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

On considère $H \subset \mathbb{R}$, un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$: $0 \in H$ et $\forall x, y \in H$, on a $x - y \in H$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que $a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

2) On considère H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ tel que $H \neq \{0\}$.

a) Montrer que $\alpha = \inf\{x > 0 \mid x \in H\}$ est bien défini.

b) On suppose ici que $\alpha > 0$.

(i) Montrer que $\alpha \in H$.

(ii) En déduire que $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.

(iii) Soit $h \in H$. Justifier qu'il existe $\delta \in [0, \alpha[$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $h = n\alpha + \delta$.

(iv) En déduire que $\alpha\mathbb{Z} = H$.

c) On suppose ici que $\alpha = 0$.

Soient $I =]u, v[$ un intervalle ouvert avec $u < v$, et $\varepsilon = v - u$

(i) Justifier qu'il existe $h \in]0, \varepsilon[\cap H$.

(ii) En déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie III. Application.

On admet que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

1) Justifier que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n + 2\pi m |\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.