Licence de Mathématiques **2**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 2

Irrationalité de π.

Partie I. Questions préliminaires.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Comme d'habitude, $h^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p d'une fonction h (p fois dérivable).

1) Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_a^b f^{(N+1)}(t)g(t)dt = \left[\sum_{k=0}^{N}(-1)^k f^{(N-k)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{N+1}\int_a^b f(t)g^{(N+1)}(t)dt.$$

2) Soit φ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, non nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit dans la suite de ce problème :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}X^n(p - qX)^n$$

et

$$I_n = \int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t)\sin(t)dt.$$

Partie II.

1) (i) Justifier l'existence de I_n.

(ii) Quel est le degré de P_n ?

2) On veut montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $P_n^{(m)}(0)$ et $P_n^{(m)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$.

(i) Justifier que $P_n^{(m)}(0) = P_n^{(m)}(\frac{p}{q}) = 0$ quand $m > 2n$.

(ii) Justifier que $P_n^{(m)}(0) = P_n^{(m)}(\frac{p}{q}) = 0$ quand $0 \leq m < n$.

(iii) Soient $k, d \in \mathbb{N}$. Exprimer la dérivée d'ordre k de $x \longmapsto x^d$.

Dans la suite de cette question 2., on suppose que $n \leq m \leq 2n$.

(iv) Comparer $P_n\left(\frac{p}{q} - X\right)$ et $P_n(X)$.

(v) En utilisant la formule de Leibnitz, montrer que

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!}\binom{n}{m-n}(-q)^{m-n}p^{2n-m}.$$

(vi) Conclure.

3) (i) Montrer que $|I_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{p^{2n+1}}{q^{n+1}}\right)$.

(ii) Soit λ un réel. Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0$.

(iii) Conclure.

Partie III.

On suppose que π s'écrit $\dfrac{p}{q}$.

1) Montrer que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) (i) Soient $m, j \in \mathbb{N}$ et $f(t) = \sin\left(t - \frac{j\pi}{2}\right)$ où t est réel. Calculer $f^{(m)}$ (on donnera une expression simple en terme de fonction sinus).

(ii) Montrer que $I_n \in \mathbb{N}$. Indication : utiliser I.1.

Partie IV.

Montrer que π est irrationnel.