Licence de Mathématiques **2**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 1

Autour des fonctions convexes.

Soit I un intervalle (dans $\mathbb{R}$) non vide. On rappelle qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$\forall\, x, y \in I,\ \forall t \in [0,1], \qquad f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Exemples.

Soient $p > 0$ et $\psi_p(x) = x^p$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1) On suppose que ψ_p est convexe. Montrer que nécessairement $p \geq 1$ (*Indication: on pourra prendre* $y = 0$ *et* $x = 1$).

2) On suppose que $p \geq 1$. Soient $x < y$ dans $\mathbb{R}^+$.

On note $\Delta(t) = \psi_p\big(tx + (1-t)y\big) - t\psi_p(x) - (1-t)\psi_p(y)$ où $t \in [0,1]$.

(i) Calculer $\Delta''(t)$ pour $t \in]0,1[$ et dresser un tableau de variation de ψ_p.

(ii) En déduire que ψ_p est convexe.

Partie I. Propriétés des fonctions convexes.

Dans toute cette partie, la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in I,\ \forall t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \text{ vérifiant } t_1 + \cdots + t_n = 1, \qquad f\Big(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f\big(x_j\big).$$

2) Soient $x < y < z \in I$.

(i) Montrer que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$.

(ii) Montrer que $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.

3) (i) Montrer que pour tout $x \in I$, la fonction définie par $\tau(u) = \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}$ où $u \in I \setminus \{x\}$, est croissante.

(ii) En déduire que pour tout x dans l'intérieur de I la dérivée à droite $f'_d(x)$ et la dérivée à gauche $f'_g(x)$ existent et vérifient $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

(iii) Que se passe-t-il au bord de I ?

(iv) Soient $x < y \in \mathring{I}$. Montrer que $f'_d(x) \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y)$.

4) Montrer que f est continue sur l'intérieur de I.

5) On appelle $\mathcal{N}$ l'ensemble des points x de I tels que f est non dérivable en x.

On suppose que $\mathcal{N}$ est non vide.

(i) Montrer que l'on peut définir une application $\theta : \mathcal{N} \to \mathbb{Q}$ avec $\theta(x) \in]f'_g(x), f'_d(x)[$.

(ii) Justifier que θ est injective et en déduire que $\mathcal{N}$ est au plus dénombrable.

Partie II. Caractérisations.

Dans cette partie, on considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Montrer que si $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ pour tous $x < y < z \in I$, alors f est convexe.

2) Dans cette question, la fonction f est dérivable sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

3) Dans cette question, la fonction f est deux fois dérivable sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Partie III. Applications.

1) (i) Retrouver les résultats de la partie Exemples.

(ii) Justifier que la fonction exponentielle est convexe.

(iii) Justifier que la fonction $-\ln$ est convexe.

2) Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ (avec $n \geq 1$). Montrer l'inégalité arithmético-géométrique:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

3) Soient I un intervalle, $f : [0,1] \longrightarrow I$ continue et $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer l'inégalité de Jensen:

$$\psi\Big(\int_0^1 f(t)\,dt\Big) \leq \int_0^1 \psi \circ f(t)\,dt.$$