Licence de Mathématiques **1**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 3

Fonction arctan et applications.

On rappelle que la fonction *arctan* est la fonction réciproque de

$$\tau \quad \left| \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \right.$$

Partie I. Propriétés.

1) Justifier que la fonction τ ci-dessus est effectivement une bijection.

2) (i) Que vaut $arctan(0)$? Que vaut $arctan(1)$?

(ii) Quelle est la parité de $arctan$? Quelle est la monotonie de $arctan$?

(iii) Est-ce que $arctan$ admet des limites en $+\infty$ ou $-\infty$? Si oui, lesquelles ?

3) Justifier que $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que calculer sa dérivée. Est-ce que $arctan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$?

On considère la fonction $\Delta(x) = arctan(x) + arctan\big(1/x\big)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

4) (i) Justifier que Δ est dérivable et montrer que sa dérivée est nulle.

(ii) En déduire la valeur de $\Delta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Partie II.

1) Que vaut $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$?

2) Justifier que pour tout entier $m \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-t^2)^m}{1+t^2}.$$

3) En déduire qu'il existe une fonction $\theta_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée telle que

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2m}\theta_m(x)\cdot$$

Partie III.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation $\tan(t) = t$ admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}[$. On notera cette solution t_n.

2) Montrer que $\dfrac{t_n}{n}$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.

3) (i) Etablir une relation entre t_n et $\arctan(t_n)$.

(ii) En déduire une relation du type $t_n = an + b + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$, où on déterminera a et b.

4) (i) Montrer qu'il existe une suite bornée $(\beta_n)_{n\geq 1}$ telle que $\dfrac{1}{t_n} = \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{\beta_n}{n^2}$.

(ii) En déduire un développement du type: $t_n = an+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{\alpha_n}{n^2}$, avec $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ bornée, où on déterminera c.