Licence de Mathématiques **1**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 1

Autour du théorème de Cesàro

<u>Partie I.</u>

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, on définit : $\qquad C_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k.$

1) Étudier la nature de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ. On veut montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$

(i) Justifier qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que: $\qquad \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(ii) En déduire que : $\qquad \forall n \geq n_0,\ |C_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell|.$

(iii) Justifier qu'il existe $n_1 \geq 1$ tel que $\qquad \forall n \geq n_1,\ \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(iv) Conclure.

3) Est-ce que réciproquement la convergence de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

4) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq C_n$.

(ii) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$ $(p+1)u_n \leq (n+p+1)C_{n+p} - nC_{n-1}$.

(iii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.

(iv) Conclure.

<u>Partie II.</u>

On définit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $r_0 = 1$ et $r_{n+1} = r_n + \mathrm{e}^{-r_n}$.

1) (i) Quelle est la monotonie de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(ii) Montrer que cette suite ne peut être convergente. Conclure.

On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \mathrm{e}^{r_{n+1}} - \mathrm{e}^{r_n}$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

3) En déduire à l'aide de I.2. que $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{r_n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1.

4) En déduire que $r_n \sim \ln(n)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, c'est à dire que $\left(\dfrac{r_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1.

Partie III.

On souhaite généraliser le théorème de Cesàro:
Soit $(\alpha_n)_n \in (\mathbb{R}^{*+})^{\mathbb{N}}$. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, on définit :

$$A_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}.$$

On veut montrer que

[pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers une limite ℓ, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers ℓ]

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = +\infty.$$

1) En testant le membre de gauche pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0 bien choisie, montrer que la condition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = +\infty$ est nécessaire.

2) En se basant sur les techniques de I.2., montrer que la condition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = +\infty$ est suffisante.

3) Application: Stolz-Cesàro.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles avec $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, non majorée. On suppose que la suite $u_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ est convergente vers ℓ. Montrer que $\dfrac{a_n}{b_n}$ est aussi convergente vers ℓ.