Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Analyse Fonctionnelle (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

Construction de la mesure de Lebesgue

28 janvier 2008

Dans ce chapitre, nous allons voir comment construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, en prolongeant la notion de longueur d'un intervalle.

1 Mesure positive engendrée par une mesure extérieure.

Définition 1 *Soit S un ensemble. On appelle* <u>*mesure extérieure*</u> *sur S toute application $m^* : \mathcal{P}(S) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :*
1) $m^*(\emptyset) = 0$;
2) $m^*(A) \leqslant m^*(B)$ si $A \subseteq B$ (<u>monotonie</u>) ;
3) $m^*\big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} m^*(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de parties de S (<u>sous σ-additivité</u>).

La différence avec une mesure positive sur $\big(S, \mathcal{P}(S)\big)$ est que l'on *ne demande pas* qu'il y ait égalité dans le 3) lorsque les parties A_n, $n \geqslant 1$, sont deuxà-deux disjointes.

Bien sûr, tout mesure positive définie sur $\mathcal{P}(S)$ tout entier est une mesure extérieure sur S. Il est d'autre part facile de voir que toute mesure extérieure sur S qui est *additive*, au sens où : $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ lorsque A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$), est une mesure positive sur $\big(S, \mathcal{P}(S)\big)$.

Proposition 2 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré.*
Si l'on définit $m^* : \mathcal{P}(S) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m^*(X) = \inf\{m(A)\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ et } X \subseteq A\}\,, \quad \forall X \subseteq S,$$

alors m^* est une mesure extérieure sur S et sa restriction à $\mathscr{T}$ est égale à m.

Preuve.
1) Il est clair que $m^*(\emptyset) = 0$ puisque $m(\emptyset) = 0$.

2) Si X et Y sont des parties de S telles que $X \subseteq Y$, alors, pour toute $A \in \mathscr{T}$, on a : $Y \subseteq A \ \Rightarrow\ X \subseteq A$; donc :

$$\inf\{m(A)\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ et } X \subseteq A\} \leqslant \inf\{m(A)\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ et } Y \subseteq A\},$$

c'est-à-dire $m^*(X) \leqslant m^*(Y)$.

3) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de parties de S. S'il existe un indice $n_0 \geqslant 1$ pour lequel $m^*(X_{n_0}) = +\infty$, on a $\sum_{n\geqslant 1} m^*(X_n) = +\infty$, de sorte que l'inégalité $m^*\big(\bigcup_{n\geqslant 1} X_n\big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} m^*(X_n)$ est évidente.

Supposons donc que $m^*(X_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par définition, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $A_n \in \mathscr{T}$ tel que $X_n \subseteq A_n$ et :

$$m(A_n) \leqslant m^*(X_n) + \varepsilon/2^n.$$

Comme $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n \subseteq \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$ et que $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n \in \mathscr{T}$ (puisque $\mathscr{T}$ est une tribu), on a $m^*\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n\big) \leqslant m\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n\big)$. Comme m est une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$, on a $m\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n\big) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} m(A_n)$; donc :

$$m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} X_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} m(A_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \big(m^*(X_n) + \varepsilon/2^n\big) = \sum_{n\geqslant 1} m^*(X_n) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela donne bien $m^*\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n\big) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} m^*(X_n)$.

Pour terminer, si $X \in \mathscr{T}$, on a, puisque m est une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$: $m(X) \leqslant m(A)$ pour tout $A \in \mathscr{T}$ tel que $X \subseteq A$; donc :

$$m^*(X) \leqslant m(X) \leqslant \inf\{m(A)\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ et } X \subseteq A\} = m^*(X),$$

d'où l'égalité. □

Proposition 3 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré et m^* la mesure extérieure construite à partir de m comme dans la Proposition 2. Alors, pour tout $A \in \mathscr{T}$, on a :*

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$$

pour tout $X \subseteq S$.

Preuve. La sous σ-additivité de m^* (Proposition 2) donne l'inégalité $m^*(X) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$. Réciproquement, pour tout $B \in \mathscr{T}$ tel que $X \subseteq B$, on a :

1) $X \cap A \subseteq B \cap A$ et $B \cap A \in \mathscr{T}$; donc $m^*(X \cap A) \leqslant m(B \cap A)$;

2) $X \cap A^c \subseteq B \cap A^c$ et $B \cap A^c \in \mathscr{T}$; donc $m^*(X \cap A^c) \leqslant m(B \cap A^c)$.

Il en résulte que :

$$m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \leqslant m(B \cap A) + m(B \cap A^c).$$

Mais $m(B \cap A) + m(B \cap A^c) = m(B)$ puisque m est une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$ et que $A, B \in \mathscr{T}$ (et $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$). Ainsi $m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \leqslant m(B)$.

Comme c'est vrai pour tout $B \in \mathscr{T}$ tel que $X \subseteq B$, on obtient l'inégalité inverse $m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \leqslant m^*(X)$. □

La Proposition 3 conduit à la définition suivante.

Définition 4 *Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S.*
On dit qu'une partie A de S est <u>m^*-mesurable</u> (ou aussi <u>mesurable au sens de Carathéodory</u>) si :

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \,, \quad \forall X \subseteq S.$$

Notons qu'en vertu de la sous σ-additivité, l'inégalité $m^*(X) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$ est toujours vraie ; pour vérifier qu'une partie A est m^*-mesurable, il suffit donc de vérifier l'inégalité inverse $m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$ pour tout $X \subseteq S$.

On a alors :

Théorème 5 (Théorème de Carathéodory (1918)) *Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Alors :*
1) l'ensemble $\mathcal{M}$ des parties m^*-mesurables est une tribu de parties de S ;
2) la restriction $\tilde{m}$ de m^* à $\mathcal{M}$ est une mesure positive sur $(S, \mathcal{M})$.
De plus, l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \tilde{m})$ est complet.

Preuve. a) Il est clair que $\emptyset \in \mathcal{M}$ et aussi que $A^c \in \mathcal{M}$ si $A \in \mathcal{M}$, puisque la définition est symétrique par rapport à A et A^c.

b) Montrons maintenant que $\mathcal{M}$ est stable par réunion, c'est-à-dire que si $A, B \in \mathcal{M}$, alors $A \cup B \in \mathcal{M}$.

Avant de passer à la preuve, notons qu'avec la stabilité par complémentation cela entraîne la stabilité de $\mathcal{M}$ par intersection.

Pour tout $X \subseteq S$, on a, par sous σ-additivité :

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*[X \cap (A \cup B)] + m^*[X \cap (A \cup B)^c] \\ &= m^*[(X \cap A) \cup (X \cap B)] + m^*(X \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Comme

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X \cap A) \cup [(X \cap B \cap A) \cup (X \cap B \cap A^c)] = (X \cap A) \cup (X \cap B \cap A^c)$$

(car $X \cap B \cap A \subseteq X \cap A$), on obtient :

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap A^c) + m^*(X \cap A^c \cap B^c) \\ &= m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \qquad \text{car } B \text{ est } m^*\text{-mesurable} \\ &= m^*(X) \qquad \text{car } A \text{ est } m^*\text{-mesurable.} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$m^*(X) = m^*[X \cap (A \cup B)] + m^*[(X \cap (A \cup B)^c]$$

et donc $A \cup B$ est m^*-mesurable, puisque c'est vrai pour toute partie X de S.

c) Nous allons montrer simultanément que <u>$\mathcal{M}$ est une tribu</u> et que <u>$\tilde{m}$ est une mesure positive</u>.

- <u>$1^{ère}$ étape.</u> *Pour tout ensemble fini $\{A_1, \ldots, A_n\}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ deux-à-deux disjoints, on a :*

$$m^*\Big[X \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\Big] = \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k), \qquad \forall X \subseteq S.$$

La preuve se fait par récurrence sur n. La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle le soit pour n. Alors :

$$\begin{aligned} & m^*\Big[X \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big)\Big] \\ &\quad = m^*\Big[X \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \cap A_{n+1}\Big] + m^*\Big[X \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \cap A_{n+1}^c\Big] \\ &\qquad\qquad (\text{car } A_{n+1} \text{ est } m^*\text{-mesurable}) \\ &\quad = m^*(X \cap A_{n+1}) + m^*\Big[X \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\Big] \\ &\qquad\qquad (\text{car } A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \text{ sont deux-à-deux disjoints}) \\ &\quad = m^*(X \cap A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k) \\ &\qquad\qquad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(X \cap A_k). \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, on obtient :

Pour toute famille finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ deux-à-deux disjoints, on a :

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k).$$

• $2^{ème}$ étape. *Si* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite (infinie) d'éléments de* $\mathcal{M}$ *deux-à-deux disjoints, alors :*

$$(i) \quad \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{M}\,;$$
$$(ii) \quad m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} m^*(A_n).$$

Posons $A = \bigcup_{k\geqslant 1} A_k$ et $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

D'après l'étape 1, nous savons que $B_n \in \mathcal{M}$. Donc, pour tout $X \subseteq S$, nous avons :

$$\begin{aligned} m^*(X) &= m^*(X\cap B_n) + m^*(X\cap B_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^n m^*(X\cap A_k) + m^*(X\cap B_n^c) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^n m^*(X\cap A_k) + m^*(X\cap A^c)\,, \ \text{ car } A^c \subseteq B_n^c. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 1$, nous obtenons :

$$(*) \qquad m^*(X) \geqslant \sum_{k\geqslant 1} m^*(X\cap A_k) + m^*(X\cap A^c)\,;$$

d'où, en utilisant la sous σ-additivité de m^* :

$$m^*(X) \geqslant m^*(X\cap A) + m^*(X\cap A^c).$$

Cela prouve que $A \in \mathcal{M}$.

De plus, en prenant $X = A$ dans l'inégalité $(*)$, nous obtenons :

$$m^*\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\Big) \geqslant \sum_{k\geqslant 1} m^*(A_k),$$

et en fait l'égalité $m^*\big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\big) = \sum_{k\geqslant 1} m^*(A_k)$, puisque l'inégalité inverse est toujours vraie, par sous σ-additivité.

• $3^{ème}$ étape. $\mathcal{M}$ *est une tribu.*

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{M}$. Posons $B_1 = A_1$, et, pour $n \geqslant 2$, $B_n = A_n \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\big)^c$. Comme $\mathcal{M}$ est stable par intersection et par complémentation, les B_n sont m^*-mesurables. Ils sont deux-à-deux disjoints car $B_n \subseteq A_n$ pour tout $n \geqslant 1$, mais $B_k \subseteq A_n^c$ pour $k > n$. Par conséquent $\bigcup_{n\geqslant 1} B_n \in \mathcal{M}$, en vertu de l'étape 2. Il en résulte que $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{M}$ puisque $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$. En effet, il est clair que $\bigcup_{n\geqslant 1} B_n \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ puisque $B_n \subseteq A_n$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, si $x \in \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ et si n_0 est le plus petit indice tel que $x \in A_{n_0}$, on a $x \notin A_k$ pour $k < n_0$, c'est-à-dire $x \in B_{n_0}$.

d) Prouvons maintenant que l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \tilde{m})$ est complet.

Soit N un ensemble $\tilde{m}$-négligeable. Il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\tilde{m}(A) = 0$ et $N \subseteq A$. Comme $m^*(N) \leqslant m^*(A) = \tilde{m}(A) = 0$, on a $m^*(N) = 0$. Cela entraîne que $N \in \mathcal{M}$. En effet, pour tout $X \subseteq S$, on a :

$$\begin{cases} X \cap N \subseteq N & \Rightarrow \quad m^*(X \cap N) = 0 \\ X \cap N^c \subseteq X & \Rightarrow \quad m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X)\,; \end{cases}$$

d'où $m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$. □

Remarque. Nous avons vu dans la Proposition 2 que l'on pouvait construire une mesure extérieure à partir d'une mesure positive. Le Théorème de Carathéodory permet de construire une mesure positive à partir d'une mesure extérieure. Ces deux constructions sont compatibles :

Proposition 6 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré σ-fini, et soit m^* la mesure extérieure sur S obtenue à partir de m dans la Proposition 2. Alors l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \tilde{m})$ obtenu à partir de m^* par le Théorème de Carathéodory est égal au complété $(S, \hat{\mathscr{T}}_m, \hat{m})$ de $(S, \mathscr{T}, m)$.*

Preuve. On a $\mathscr{T} \subseteq \mathcal{M}$ par la Proposition 3. Comme $\mathcal{M}$ est $\tilde{m}$-complète, par le Théorème de Carathéodory, et que $m(A) = m^*(A)$ pour tout $A \in \mathscr{T}$ par la Proposition 2, on a $(S, \hat{\mathscr{T}}_m, \hat{m}) \subseteq (S, \mathcal{M}, \tilde{m})$.

Notons que cette inclusion est vraie même sans l'hypothèse de σ-finitude de m.

Pour montrer l'inclusion inverse, nous nous servirons de deux lemmes.

Lemme 7 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré. Alors, pour tout $X \subseteq S$ tel que $m^*(X) < +\infty$, il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $X \subseteq A$ et $m^*(X) = m(A)$.*

Lemme 8 *Si $(S, \mathscr{T}, m)$ est un espace mesuré σ-fini, il en est de même de $(S, \mathcal{M}, \tilde{m})$.*

Le contre-exemple suivant montre que le Lemme 8 et la Proposition 6 ne sont pas vraies pour des mesures non σ-finies.

Soit S un ensemble non dénombrable, $\mathscr{T}$ la tribu des parties A de S qui sont soit dénombrables, soit de complémentaire dénombrable, et m la mesure (non σ-finie) définie par $m(A) = 0$ si A est dénombrable et $m(A) = +\infty$ si A^c est dénombrable. La tribu $\mathscr{T}$ est m-complète (car toute partie contenue dans une partie dénombrable est aussi dénombrable) et différente de $\mathcal{P}(S)$ (il existe des parties de S qui ne sont pas dénombrables ni de complémentaire dénombrable ; pour le voir, on peut remarquer que, S étant infini, il existe une bijection $\varphi\colon \{1, 2\} \times S \to S$; alors la partie $X = \varphi(\{1\} \times S)$ n'est pas dénombrable et son complémentaire $X^c = \varphi(\{2\} \times S)$ non plus). Pourtant $\mathcal{M} = \mathcal{P}(S)$. En effet, $m^*(X) = m(X) = 0$ si X est dénombrable et $m^*(X) = +\infty$ si X n'est pas dénombrable (car alors $X \subseteq A$ avec $A \in \mathscr{T}$ exige que A^c soit dénombrable, et donc $m(A) = +\infty$). On voit alors que toute partie X de S est m^*-mesurable : si X est dénombrable, alors $X \cap A$ et $X \cap A^c$ aussi ; donc

$m^*(X) = 0 = 0+0 = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$; si X n'est pas dénombrable, alors $X \cap A$ ou $X \cap A^c$ non plus ; on a donc $m^*(X \cap A) = +\infty$ ou $m^*(X \cap A^c) = +\infty$, de sorte que $m^*(X) = +\infty = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$.

Suite de la preuve de la Proposition 6. Soit $X \in \mathcal{M}$ et montrons que $X \in \hat{\mathscr{T}}_m$. Séparons deux cas.

a) Si $\tilde{m}(X) = m^*(X) < +\infty$, il existe, par le Lemme 7, une partie $A \in \mathscr{T}$ telle que $X \subseteq A$ et $m^*(X) = m(A)$. Comme $\mathscr{T} \subseteq \mathcal{M}$ et que $m = \tilde{m}_{|\mathscr{T}}$ et $\tilde{m} = m^*_{|\mathcal{M}}$, on a $\tilde{m}(X) = \tilde{m}(A)$. Alors, puisque $\tilde{m}$ est une mesure positive et que $\tilde{m}(X) < +\infty$, on a $\tilde{m}(A \setminus X) = 0$. Mais cela s'écrit aussi $m^*(A \setminus X) = 0$. Pour voir qu'alors $X \in \hat{\mathscr{T}}_m$, utilisons de nouveau le Lemme 7 : il existe $B \in \mathscr{T}$ tel que $A \setminus X \subseteq B$ et $m^*(A \setminus X) = m(B)$. Cela entraîne en particulier que $m(B) = 0$ et, puisque $A \setminus X \subseteq B$, que $A \setminus X$ est m-négligeable, c'est-à-dire que $A \setminus X \in \hat{\mathscr{T}}_m$. Mais $\hat{\mathscr{T}}_m$ est une tribu contenant $\mathscr{T}$; comme $A \in \mathscr{T}$, cela entraîne que $X \in \hat{\mathscr{T}}_m$.

b) Si $\tilde{m}(X) = m^*(X) = +\infty$, on utilise le Lemme 8 : l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \tilde{m})$ est σ-fini ; il existe donc une suite croissante $(S_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $S = \lim\limits_{n \to +\infty}\!\uparrow S_n$ et $\tilde{m}(S_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on a $X \cap S_n \in \mathcal{M}$ et $\tilde{m}(X \cap S_n) < +\infty$. Il résulte de la partie a) de la preuve que $X \cap S_n \in \hat{\mathscr{T}}_m$. Alors $X = \bigcup_{n \geqslant 1} (X \cap S_n) \in \hat{\mathscr{T}}_m$.

On a donc $\mathcal{M} = \hat{\mathscr{T}}_m$. De plus $\tilde{m} = \hat{m}$ puisque $\tilde{m}_{|\mathscr{T}} = \hat{m}_{|\mathscr{T}} = m$ et que le prolongement de m à $\hat{\mathscr{T}}_m$ est unique. $\square$

Preuve du Lemme 7. Par définition de m^*, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $A_n \in \mathscr{T}$ tel que $X \subseteq A_n$ et $m(A_n) \leqslant m^*(X) + 1/2^n$. Si $A = \bigcap_{n \geqslant 1} A_n$, on a $A \in \mathscr{T}$, $X \subseteq A$ et, pour tout $n \geqslant 1$: $m(A) \leqslant m(A_n) \leqslant m^*(X) + 1/2^n$; donc $m(A) \leqslant m^*(X)$. Comme $X \subseteq A$, on a aussi $m^*(X) \leqslant m(A)$, d'où l'égalité. $\square$

Preuve du Lemme 8. Il existe une suite croissante $(S_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que $S = \lim\limits_{n \to +\infty}\!\uparrow S_n$ et $m(S_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\mathscr{T} \subseteq \mathcal{M}$, on a $S_n \in \mathcal{M}$ et $\tilde{m}(S_n) = m(S_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. $\square$

2 Théorème de prolongement.

Les mesures positives sont définies sur des tribus de parties, qui sont, sauf exception, de très gros objets. Il n'est donc pas possible, en général, de définir, de façon explicite, une mesure positive, c'est-à-dire de préciser les valeurs prises en tous les éléments de la tribu. Par contre, on peut le faire sur une classe de parties engendrant cette tribu. Afin de pouvoir construire un prolongement, on va demander que cette classe ait certaines propriétés de stabilité.

Définition 9 *On dit qu'une classe de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ d'un ensemble S est une algèbre de parties de S si :*
1) $S \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\mathcal{A}$ est stable par complémentation : $\in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
3) $\mathcal{A}$ est stable par réunion (finie) *: $A \cup B \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$.*

Toute algèbre de parties est aussi stable par intersection : $A \cap B \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$, et par différence : $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ si $A, B \in \mathcal{A}$.
Toute tribu de parties de S est en particulier une algèbre de parties de S.

Définition 10 *Si S est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une algèbre de parties de S, on appelle mesure positive sur $(S, \mathcal{A})$ toute application $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :*
1) $\mu(\emptyset) = 0$;
2) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux-à-deux disjoints **et** *qui est* **telle que** *$\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$, on a :*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité}).$$

On dit que μ est *finie* si $\mu(S) < +\infty$, et qu'elle est *σ-finie* s'il existe des $S_n \in \mathcal{A}$ tels que $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$ et $\mu(S_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$.

Comme pour les mesures positives définies sur une tribu, on montre les propriétés suivantes :
a) *croissance* : si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A \leqslant \mu(B)$;
b) *sous σ-additivité* : si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$, alors $\mu\big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$.
Pour une mesure positive définie sur une algèbre de parties, la formule de la Proposition 2 ne permet pas d'obtenir une mesure extérieure. Toutefois, si $(S, \mathscr{T}, m)$ est un espace mesuré, on a, pour toute partie $X \subseteq S$:

$$\inf\{m(A)\,;\ A \in \mathscr{T},\ X \subseteq A\} = \inf\Big\{\sum_{n\geqslant 1} m(A_n)\,;\ A_n \in \mathscr{T}, \forall n \geqslant 1,\ X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big\}.$$

En effet, $\geqslant$ est évidente (il suffit de prendre $A_1 = A$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geqslant 2$), et $\leqslant$ résulte de ce que, puisque $\mathscr{T}$ est une tribu, $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathscr{T}$ et de ce que $m\big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} m(A_n)$.
Cette remarque conduit au résultat suivant :

Proposition 11 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de l'ensemble S, et μ une mesure positive sur $(S, \mathcal{A})$. Alors l'application $m^* \colon \mathcal{P}(S) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :*

$$m^*(X) = \inf\Big\{\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)\,;\ A_n \in \mathscr{T}, \forall n \geqslant 1,\ X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big\}$$

pour $X \subseteq S$, est une mesure extérieure sur S, et $m^*_{|\mathcal{A}} = \mu$.

Notons que l'on peut toujours recouvrir X par la réunion d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ (il suffit de prendre $A_1 = S$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geqslant 2$).

Preuve. Le fait que m^* soit une mesure extérieure se montre exactement de la même façon que dans la Proposition 2.

Pour voir que $m^*_{|\mathcal{A}} = \mu$, prenons $A \in \mathcal{A}$. On a, de façon évidente, $m^*(A) \leqslant \mu(A)$ (prendre $A_1 = A$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geqslant 2$). Pour l'inégalité inverse, prenons des $A_n \in \mathcal{A}$ tels que $A \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$. Comme $A \cap A_n \in \mathcal{A}$ et que $\bigcup_{n\geqslant 1}(A \cap A_n) = A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}(A \cap A_n)\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n).$$

Il en résulte que $\mu(A) \leqslant m^*(A)$. □

On a alors :

Théorème 12 (Théorème de prolongement de Hahn) *Toute mesure positive μ définie sur une algèbre de parties $\mathcal{A}$ d'un ensemble S se prolonge en une mesure positive m sur la tribu $\mathscr{T} = \sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.*
De plus, si μ est σ-finie, alors ce prolongement est unique et m est σ-finie. Si μ est finie, m l'est aussi.

Preuve. La Proposition 11 dit qu'il existe une mesure extérieure m^* sur S dont la restriction à $\mathcal{A}$ est μ. Par le Théorème de Carathéodory, il existe une tribu $\mathcal{M}$ (la tribu des parties m^*-mesurables) telle que $\tilde{m} = m^*_{|\mathcal{M}}$ soit une mesure positive sur $(S, \mathcal{M})$. Or on démontre, exactement comme dans la Proposition 3, que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Il en résulte que $\mathscr{T} = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$ et que la mesure positive $m = \tilde{m}_{|\mathscr{T}} = m^*_{|\mathscr{T}}$ convient.

Voyons maintenant l'unicité. Soit m_1 et m_2 deux mesures positives définies sur une tribu contenant $\mathcal{A}$ et prolongeant μ. Soit :

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A}\,;\ \mu(A) < +\infty\}.$$

Alors $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. Comme μ est σ-finie, il existe une suite croissante $(S_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $S = \lim\limits_{n\to+\infty}\!\uparrow S_n$ et $\mu(S_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$: ces S_n sont dans $\mathcal{C}$. De plus, comme $m_{1|\mathcal{A}} = m_{2|\mathcal{A}} = \mu$, on a $m_1(A) = m_2(A) < +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{C}$. Le Théorème d'unicité des mesures assure que m_1 et m_2 sont égales sur $\sigma(\mathcal{C})$. Mais pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\!\uparrow (A \cap S_n)$ et $A \cap S_n \in \mathcal{C}$; donc $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$, de sorte que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Pour terminer, il reste à remarquer que toute mesure positive prolongeant une mesure σ-finie (resp. finie) l'est aussi : si μ est finie, alors $S \in \mathcal{A} \subseteq \mathscr{T}$ et $m(S) = \mu(S) < +\infty$; si μ est σ-finie, $m(S_n) = \mu(S_n) < +\infty$ avec $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$ et $S_n \in \mathcal{A} \subseteq \mathscr{T}$. □

Contre-exemples. 1) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de parties de $\mathbb{R}$ formée par les réunions finies d'intervalles du type : $]-\infty, a[$, $[a, b[$, ou $[b, +\infty[$, avec $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. On a une mesure positive μ, non σ-finie, sur $\mathcal{A}$, en posant $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$. La tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la tribu borélienne $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$, et on a deux prolongements distincts de μ : d'une part la mesure de comptage, et d'autre part la mesure m définie par $m(\emptyset) = 0$ et $m(A) = +\infty$ pour $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$.

2) Si l'on prend l'algèbre de parties de $\mathbb{Q}$, définie de la même façon que ci-dessus (mais avec des intervalles de $\mathbb{Q}$), alors $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$; la mesure de comptage c sur $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ est σ-finie, mais $\mu = c_{|\mathcal{A}}$ ne l'est pas ; si $m = 2c$, alors $m \neq c$, mais $m_{|\mathcal{A}} = c_{|\mathcal{A}}$, c'est-à-dire que m et c sont deux prolongements distincts de μ.

3 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$. On considère l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathscr{I}}$ de toutes les réunions finies d'éléments de $\mathscr{I}$.

Lemme 13 *Pour tout élḿent A de $\mathcal{A}_{\mathscr{I}}$, il existe une décomposition minimale unique en réunion finie d'intervalles deux-à-deux disjoints.*

Le terme "minimal" se rapporte au nombre d'éléments de la décomposition. Il y a plusieurs décompositions non minimales ; par exemple : $[0, 1] = [0, 1/2\,[\cup[1/2, 1]$.

Preuve. Ce sont les composantes connexes de A. □

Définition 14
1) La longueur d'un intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, est

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & si\ -\infty < a \leqslant b < +\infty \\ +\infty & si\ a\ ou\ b\ est\ infini. \end{cases}$$

2) Si $A \in \mathcal{A}_{\mathscr{I}}$ et $A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ est la décomposition minimale de A, on définit la longueur de A par :

$$\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k).$$

Le point essentiel est alors :

Théorème 15 *ℓ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathscr{I}})$ et elle est σ-finie.*

Avant de voir la preuve, voyons tout de suite la conséquence fondamentale, qui résulte du Théorème de prolongement de Hahn :

Théorème 16 *Il existe une unique mesure positive* λ *sur* $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$ *telle que :*

$$\boxed{\lambda(]a,b[) = b - a}$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a \leqslant b$.
On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

L'unicité vient du Théorème d'unicité des mesures, appliqué à la classe

$$\mathscr{I}_0 = \{]a,b[\,;\ -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$$

qui est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne, vu que $\mathbb{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\uparrow]-n,n[$, et que ℓ est finie sur $\mathscr{I}_0$.

Preuve du Théorème 15. Il est tout d'abord clair que ℓ est σ-finie puisque $\ell([-n,n]) = 2n < +\infty$ et $\mathbb{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\uparrow [-n,n]$.

1) Prouvons ensuite, dans un premier temps, que ℓ est additive.

Soit A et A' deux éléments disjoints de $\mathcal{A}_{\mathscr{I}}$. Si

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{et} \qquad A' = \bigcup_{k=1}^{n'} I'_k$$

sont leurs décompositions minimales, alors :

$$A \cup A' = \bigcup_{k=1}^{n''} I''_k\,,$$

avec $n'' = n + n'$ et

$$I''_k = \begin{cases} I_k & \text{si} \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \\ I'_{k-n} & \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant n+n' = n''. \end{cases}$$

Ce n'est pas la décomposition minimale, mais les I''_k sont néanmoins disjoints : si $k_1 < k_2$, trois cas sont possibles :

$\star$ $1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$; alors $I''_{k_1} = I_{k_1}$ et $I''_{k_2} = I_{k_2}$; donc $I''_{k_1} \cap I''_{k_2} = I_{k_1} \cap I_{k_2} = \emptyset$;

$\star$ $1 \leqslant k_1 \leqslant n$ et $n+1 \leqslant k_2 \leqslant n+n'$; alors $I''_{k_1} = I_{k_1} \subseteq A$ et $I''_{k_2} = I'_{k_2-n} \subseteq A'$, d'où $I''_{k_1} \cap I''_{k_2} = \emptyset$ puisque A et A' sont disjoints ;

$\star$ $n+1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n+n'$; alors $I''_{k_1} = I'_{k_1-n}$ et $I''_{k_2} = I'_{k_2-n}$; donc $I''_{k_1} \cap I''_{k_2} = I'_{k_1-n} \cap I'_{k_2-n} = \emptyset$.

Tout revient donc à montrer que pour <u>toute</u> décomposition

$$B = \bigcup_{r=1}^{p} J_r$$

d'un élément $B \in \mathcal{A}_{\mathscr{I}}$ en intervalles deux-à-deux disjoints, on a :

$$\ell(B) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r).$$

En raisonnant sur chaque intervalle de la décomposition minimale de B, il suffit de le faire lorsque $B = I$ est un intervalle.

Or si l'intervalle I est infini, l'un des J_r l'est aussi, de sorte que $\sum_{r=1}^{p} \ell(J_r) = +\infty$ est égal à $\ell(I) = +\infty$.

Dans le cas où I est fini, appelons a et b ses extrémités ($-\infty < a \leqslant b < +\infty$) et appelons a_r et b_r ($a_r \leqslant b_r$) celles de J_r. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles J_r, on peut supposer qu'on les a numérotés en ordre croissant :

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant b_{p-1} \leqslant a_p \leqslant b_p.$$

Mais comme $J_1, \ldots, J_p$ forment une partition de I, on a en fait :

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant \cdots \leqslant b_{p-1} = a_p \leqslant b_p = b.$$

Donc :

$$\ell(I) = b - a = \sum_{r=1}^{p} (b_r - a_r) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r).$$

<u>Conséquence</u> : si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_{\mathscr{I}}$, alors

$$\ell\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ell(A_k).$$

En effet, si l'on pose, comme dans la preuve de la $3^{\text{ème}}$ étape de la preuve du Théorème de Carathéodory : $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots,$ $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$, alors $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}_{\mathscr{I}}$, $B_k \subseteq A_k$ pour tout $k \leqslant n$ et $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Donc, puisque les B_k sont deux-à-deux disjoints :

$$\ell\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \ell\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ell(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ell(A_k).$$

2) Montrons maintenant que <u>ℓ est σ-additive</u>.

Pour cela, comme ci-dessus, en raisonnant sur chaque intervalle de la décomposition minimale des éléments de $\mathcal{A}_{\mathscr{I}}$, il suffit de montrer que si I est un intervalle qui s'écrit comme réunion d'une suite d'intervalles I_n, $n \geqslant 1$, deux-à-deux disjoints, alors :

$$\ell(I) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n).$$

Remarque. Ici, il n'est plus possible de ranger les I_n en ordre croissant. Par exemple, si :

$$\begin{cases} 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p < \cdots < 1/2 & \text{avec } \lim\limits_{p\to+\infty}\uparrow a_p = 1/2 \\ 1 > b_1 > b_2 > \cdots > b_q > \cdots > 1/2 & \text{avec } \lim\limits_{q\to+\infty}\downarrow b_q = 1/2, \end{cases}$$

on a (*faire un dessin*) :

$$[0,1] = \Big(\bigcup_{p\geqslant 1} [a_p, a_{p+1}[\Big) \cup \{1/2\} \cup \Big(\bigcup_{q\geqslant 1}]\, b_{q+1}, b_q]\Big),$$

c'est-à-dire qu'en posant, pour $p \geqslant 1$:

$$I_1 = \{1/2\}\,; \quad I_{2p} = [a_p, a_{p+1}[\,; \quad I_{2p+1} =]\, b_{p+1}, b_p]\,,$$

on a :

$$[0,1] = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n\,;$$

mais il n'existe aucune permutation $\pi\colon \{1,2,\ldots\} \to \{1,2,\ldots\}$ telle que :

$$\sup I_{\pi(n)} \leqslant \inf I_{\pi(n+1)}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Suite de la preuve. 1er cas : I est fini.

Appelons a et b ses extrémités ($-\infty < a \leqslant b < +\infty$).

• Pour tout $N \geqslant 1$, on a, puisque les I_n sont deux-à-deux disjoints :

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) = \ell\Big(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) \leqslant \ell(I).$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \leqslant \ell(I).$$

• Réciproquement, étant donné que l'on peut supposer $a < b$ (car sinon $\ell(I) = 0$ et l'inégalité ci-dessus est automatiquement une égalité), choisissons un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < b - a$, et considérons l'intervalle **compact**

$$[a + \varepsilon/4, b - \varepsilon/4] = [a', b'] \subseteq I.$$

On a :

$$[a',b'] \subseteq I = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} \Big] a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\,, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \Big[\,,$$

où a_n et b_n ($a_n \leqslant b_n$) sont les extrémités de I_n.

Ainsi, si l'on pose $a'_n = a_n - \varepsilon/2^{n+2}$ et $b'_n = b_n + \varepsilon/2^{n+2}$, on a :

$$[a',b'] \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1}]a'_n, b'_n[.$$

L'intervalle $[a',b']$ étant compact, le **Théorème de Borel-Lebesgue** (!) (il a été énoncé par Borel en 1895, justement pour démontrer la σ-additivité de ℓ) dit qu'il existe une partie finie F de $\{1,2,\ldots\}$ telle que :

$$[a',b'] \subseteq \bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[.$$

Alors :

$$\begin{aligned} b'-a' &\leqslant \ell\Big(\bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[\Big) \leqslant \sum_{n\in F}(b'_n - a'_n) = \sum_{n\in F}(b_n - a_n) + \sum_{n\in F}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}(b_n - a_n) + \sum_{n\geqslant 1}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2}\,\cdot \end{aligned}$$

Comme $b'-a' = (b-a) - \varepsilon/2$, cela donne :

$$\ell(I) = b-a \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n) + \varepsilon\,,$$

d'où :

$$\ell(I) = b-a \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n)\,,$$

en faisant tendre ε vers 0.

$2^{\text{ème}}$ cas : I est infini. Alors, pour tout $M>0$, il existe un entier $N\geqslant 1$ tel que

$$\ell(I\cap[-N,N]) \geqslant M.$$

Comme $I\cap[-N,N]$ est fini et est la réunion disjointe des intervalles $I_n\cap[-N,N]$, on obtient, en utilisant le 1^{er} cas :

$$M \leqslant \ell(I\cap[-N,N]) = \sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n\cap[-N,N]) \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n).$$

Donc

$$\sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n) = +\infty = \ell(I)\,,$$

et cela termine la preuve. □

Remarque. Pour voir que la compacité des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ est essentielle, notons que sur l'algèbre de parties de $\mathbb{Q}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{Q}$, la longueur ℓ n'est plus σ-additive ; en effet, on peut écrire, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, l'intervalle $I=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ comme $I=\bigcup_{r\in I} I_r$, avec $I_r=\{r\}$; pourtant $\ell(I_r)=0$ pour tout $r\in I$ et donc $\sum_{r\in I}\ell(I_r) = 0 < 1 = \ell(I)$.

4 Propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Par définition de ℓ, tout intervalle réduit à un point est de longueur nulle ; il en résulte donc immédiatement que :

Proposition 17 *Tout ensemble dénombrable D de $\mathbb{R}$ possède une mesure de Lebesgue nulle : $\lambda(D) = 0$.*

En particulier, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Par contre, il y a des ensembles boréliens non dénombrables de mesure nulle. Par exemple, l'*ensemble de triadique Cantor*

$$K = \bigcap_{n \geqslant 0} K_n,$$

avec $K_0 = [0,1]$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$K_{n+1} = \Big(\frac{1}{3}\, K_n\Big) \cup \Big(\frac{1}{3}\,(K_n + 2)\Big).$$

En effet, K_n est la réunion disjointe de 2^n intervalles de longueur $1/3^n$; donc $\lambda(K) \leqslant \lambda(K_n) = \ell(K_n) = 2^n/3^n$, ce qui entraîne $\lambda(K) = 0$. D'autre part, K n'est pas dénombrable car il contient tous les nombres $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a_n}{3^n}$ lorsque $(a_n)_{n \geqslant 1}$ parcourt $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (K est en fait est égal à l'ensemble de ces nombres).

La mesure de Lebesgue possède une importante propriété, qui la caractérise, d'ailleurs (si on précise que la mesure de l'intervalle $[0,1]$ doit être égale à 1) : elle est invariante par translation.

Théorème 18 *La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation.*

Dire que λ est invariante par translation signifie que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda(B + \alpha) = \lambda(B)$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}$. Autrement dit, si $\theta_\alpha \colon x \in \mathbb{R} \mapsto x - \alpha \in \mathbb{R}$ est la translation (à gauche) par α, cela signifie que $\theta_\alpha(\lambda) = \lambda$.

Preuve. Cela résulte de l'unicité donnée dans le Théorème 16, puisque $\theta(\lambda)$ et λ sont égales :

$$\begin{aligned}\big(\theta_\alpha(\lambda)\big)(]a,b[) &= \lambda\big(\theta_\alpha^{-1}(]a,b[)\big) = \lambda(]a+\alpha, b+\alpha[) = (b+\alpha) - (a+\alpha) \\ &= b - a = \lambda(]a,b[)\end{aligned}$$

sur $\mathscr{I}_0 = \{]a,b[\,;\ -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$. □

De la même façon, on a :

Proposition 19 *La mesure de Lebesgue est invariante par symétrie.*

Cela signifie que $\lambda(-B) = \lambda(B)$ pour tout borélien B, ou encore que, si s est la symétrie $s\colon x \in \mathbb{R} \to -x \in \mathbb{R}$, alors $s(\lambda) = \lambda$.

On peut préciser la construction de la mesure extérieure construite à partir de ℓ.

Proposition 20 *La mesure extérieure λ^* construite sur $\mathbb{R}$ à partir de ℓ vérifie :*

$$\lambda^*(X) = \inf \Big\{ \sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n)\,;\ I_n \text{ intervalle } \underline{\text{ouvert}} \text{ et } X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \Big\}$$

pour tout $X \subseteq \mathbb{R}$.

Preuve. Par définition,

$$\lambda^*(X) = \inf \Big\{ \sum_{n\geqslant 1} \ell(A_n)\,;\ A_n \in \mathcal{A}_{\mathscr{I}}\,,\ X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \Big\}.$$

Comme ℓ est additive et que tout élément de $\mathcal{A}_{\mathscr{I}}$ s'écrit comme réunion finie d'intervalles deux-à-deux disjoints, on a aussi :

$$\lambda^*(X) = \inf \Big\{ \sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n)\,;\ I_n \in \mathscr{I}\,,\ X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \Big\}.$$

Mais, pour tout $\varepsilon > 0$, si $A \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} I_n$, il existe, tout $n \geqslant 1$, un intervalle ouvert $J_n \supseteq I_n$ tel que $\ell(I_n) + \varepsilon/2^n \leqslant \ell(J_n)$; donc

$$\lambda^*(X) \leqslant \inf \Big\{ \sum_{n\geqslant 1} \ell(J_n)\,;\ J_n \text{ intervalle ouvert}\,,\ X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} J_n \Big\} + \varepsilon.$$

D'où le résultat, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. $\square$

Proposition 21 *Soit X une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\lambda^*(X) < +\infty$. Alors :*

1) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert Ω_ε tel que

$$X \subseteq \Omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad \lambda(\Omega_\varepsilon) \leqslant \lambda^*(X) + \varepsilon\,;$$

2) il existe un G_δ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts) G tel que $X \subseteq G$ et $\lambda(G) = \lambda^*(A)$.

Preuve. 1) Par la Proposition 20, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des intervalles ouverts I_n tels que $X \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} I_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \varepsilon$. Alors $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\geqslant 1}$ est un ouvert contenant X et

$$\lambda(\Omega_\varepsilon) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \varepsilon.$$

2) Appliquons, pour tout $k \geqslant 1$ le 1) avec $\varepsilon = 1/k$. Alors $G = \bigcap \Omega_{1/k}$ est un G_δ contenant X et pour tout $k \geqslant 1$: $\lambda(G) \leqslant \lambda(\Omega_{1/k} \leqslant \lambda^*(X)) \leqslant 1/k$, de sorte que $\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X)$. Comme $X \subseteq G$, on a aussi $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(G) = \lambda(G)$, d'où l'égalité. □

Corollaire 22 *Une partie N de $\mathbb{R}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue si et seulement si $\lambda^*(N) = 0$.*

Preuve. En effet, si N est λ-négligeable, il existe un borélien $A \supseteq N$ tel que $\lambda(A) = 0$; alors $\lambda^*(N) \leqslant \lambda^*(A) = \lambda(A) = 0$, d'où $\lambda^*(N) = 0$. Réciproquement, si $\lambda^*(N) = 0$, alors le 2) de la proposition précédente montre que N est λ-négligeable. □

Remarque. Il en résulte qu'une partie N de $\mathbb{R}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut la recouvrir par une suite d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à ε.

La Proposition 21 exprime une *propriété de régularité* de la mesure de Lebesgue. On peut préciser cela de la façon suivante.

Théorème 23 (régularité extérieure de la mesure de Lebesgue) *Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(\Omega)\,;\ \Omega \text{ soit ouvert et } B \subseteq \Omega\}.$$

Preuve. Cela résulte immediatement de la Proposition précédente si $\lambda(B) < +\infty$, et c'est évident si $\lambda(B) = +\infty$, puisqu'alors on a forcément $\Lambda(\Omega) = +\infty$ pour tout ouvert $\Omega \supseteq B$. □

Proposition 24 *Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert Ω_ε et un fermé F_ε tels que*

$$F_\varepsilon \subseteq B \subseteq \Omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad \lambda(\Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Preuve. Il suffit de montrer que l'on peut trouver un ouvert Ω_ε et un fermé F_ε tels que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq \Omega_\varepsilon$ et $\lambda(\Omega_\varepsilon \setminus B) \leqslant \varepsilon/2$ et $\lambda(B \setminus F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$, car $\Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon = (\Omega_\varepsilon \setminus B) \cup (B \setminus F_\varepsilon)$ et donc $\lambda(\Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leqslant \lambda(\Omega_\varepsilon \setminus B) + \lambda(B \setminus F_\varepsilon)$.

Pour cela, il suffit en fait de montrer que pour tout borélien A et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U_ε tel que $A \subseteq U_\varepsilon$ et $\lambda(U_\varepsilon \setminus A) \leqslant \varepsilon/2$, car en appliquant ceci au borélien $A = B^c$, le fermé $F_\varepsilon = U_\varepsilon^c$ vérifiera $F_\varepsilon \subseteq B$ et $B \setminus F_\varepsilon = U_\varepsilon \setminus B^c$, donc $\lambda(B \setminus F_\varepsilon) = \lambda(U_\varepsilon \setminus B^c) \leqslant \varepsilon/2$.

Mais, lorsque $\lambda(A) < +\infty$, la Proposition 21 dit qu'il existe un ouvert Ω contenant A tel que $\lambda(\Omega_\varepsilon) \leqslant \lambda(A) + \varepsilon/2$. Comme alors $\lambda(\Omega) < +\infty$, on a $\Lambda(\Omega \setminus A) = \lambda(\Omega) - \lambda(A) \leqslant \varepsilon/2$.

Lorsque $\lambda(A) = +\infty$, ce qui précède, appliqué à $A_n = A \cap [-n, n]$ au lieu de A et à $\varepsilon/2^n$ au lieu de ε, donne un ouvert Ω_n contenant A_n tel que $\lambda(\Omega_n \setminus A_n) \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$. Alors l'ouvert $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n$ contient A et

$$\lambda(\Omega \setminus A) \leqslant \lambda\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} (\Omega_n \setminus A_n)\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda(\Omega_n \setminus A_n) \leqslant \varepsilon/2.$$

Cela termine la preuve. □

Théorème 25 (régularité intérieure de la mesure de Lebesgue) *Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\lambda(B) = \sup\{\lambda(K)\,;\ K \text{ soit compact et } K \subseteq B\}.$$

Preuve. D'après la proposition précédente, on a :

$$\lambda(B) = \sup\{\lambda(F)\,;\ F \text{ soit fermé et } F \subseteq B\}.$$

Alors $K_n = F \cap [-n, n]$ est compact et contenu dans B et $\lambda(F) = \lim_{n\to+\infty}\uparrow K_n$; cela donne le résultat. □

5 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Une façon de construire la mesure de Lebesgue λ_d sur $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)\big)$ est de la définir comme la mesure-produit $\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ (d fois).

On peut aussi la construire directement, comme on l'a fait pour λ sur $\mathbb{R}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des *pavés* (*rectangles* pour $d = 2$) de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire les produits

$$P = \prod_{1\leqslant k\leqslant d} I_k = I_1 \times \ldots \times I_d$$

d'intervalles I_k de $\mathbb{R}$.

Le *volume* (*aire* pour $d = 2$) d'un tel pavé (rectangle) est défini par :

$$v_d(P) = \prod_{1\leqslant k\leqslant d} \ell(I_k).$$

On considère alors l'algèbre $\mathcal{A}_d$ des réunions finies d'éléments de $\mathcal{P}$, et on prolonge v_d à $\mathcal{A}_d$. On montre ensuite, comme dans le Théorème 15, que v_d est une mesure positive σ-finie sur $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)\big)$. L'unique prolongemment λ_d de v_d à $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ obtenu par le Théorème de prolongement de Hahn est la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$, et elle est égale à la mesure-produit $\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ (d fois).