Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Mesure et Intégration (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

Séries de Fourier

May 16, 2006

1 Fonctions continues.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue de période 1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le *coefficient de Fourier* de f en n par :

$$\boxed{\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi int}\, dt}\ .$$

La *série de Fourier* de f est la série de fonctions :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, \mathrm{e}^{2\pi int}.$$

La *somme partielle d'ordre n* est :

$$\boxed{(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi ikx}}\ .$$

On a :

$$\begin{aligned}
(S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_0^1 f(t) \mathrm{e}^{-2\pi ikt}\, dt \right) \mathrm{e}^{2\pi ikx} \\
&= \int_0^1 f(t) \left[\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2\pi ik(t-x)} \right] dt \\
&\underset{v=x-t}{=} \int_x^{x-1} f(x-v) \left[\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2\pi ikv} \right] (-dv) \\
&\underset{\text{périodicité}}{=} \int_0^1 f(x-v)\, D_n(v)\, dv\,,
\end{aligned}$$

avec :

$$\boxed{D_n(v) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2\pi ikv}}\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{(S_n f)(x) = \int_0^1 f(x-v)\, D_n(v)\, dv}\,.$$

Définition 1 *D_n s'appelle le* <u>*noyau de Dirichlet d'ordre n*</u>.

Lemme 2

$$\boxed{D_n(v) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((2n+1)\pi v\big)}{\sin(\pi v)} & \text{si } v \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,, \\ 2n+1 & \text{si } v \in \mathbb{Z}. \end{cases}}$$

Preuve. C'est la somme des termes d'une suite géométrique. Pour $v \notin \mathbb{Z}$, on a donc :

$$\begin{aligned} D_n(v) &= \mathrm{e}^{-2\pi inv}\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi i(2n+1)v}-1}{\mathrm{e}^{2\pi iv}-1} \\ &= \mathrm{e}^{-\cancel{2}\pi inv}\;\frac{\mathrm{e}^{\pi i(\cancel{2}n+1)v}\,\left[\mathrm{e}^{\pi i(2n+1)v}-\mathrm{e}^{-\pi i(2n+1)v}\right]}{\cancel{\mathrm{e}}^{\pi iv}\,\left[\mathrm{e}^{\pi iv}-\mathrm{e}^{-\pi iv}\right]} \\ &= \frac{2i\sin\big((2n+1)\pi v\big)}{2i\sin(\pi v)}\,. \end{aligned}$$

□

En général $(S_n f)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers f. Plus précisément, du Bois-Reymond a construit en 1875 une fonction continue f, de période 1, telle que, pour <u>aucun</u> $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big((S_n f(x)\big)_{n\geqslant 1}$ ne soit convergente. On peut néanmoins rendre la suite convergente si l'on fait des hypothèses supplémentaires sur f. Par exemple :

Théorème 3 (Théorème de Dirichlet) *Si f est* <u>*dérivable*</u> *sur $\mathbb{R}$, de période 1, alors :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (S_n f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Preuve. Remarquons d'abord que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \qquad \int_0^1 D_n(v)\, dv = 1.$$

En effet :

$$\int_0^1 D_n(v)\, dv = \int_0^1 \mathbb{1}(-v)\, D_n(v)\, dv = (S_n \mathbb{1})(0) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{\mathbb{1}}(k) = 1,$$

car :

$$\hat{\mathbb{1}}(k) = \int_0^1 1.\mathrm{e}^{-2\pi ikt}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Donc :

$$f(x) = f(x)\int_0^1 D_n(v)\,dv = \int_0^1 f(x)\,D_n(v)\,dv$$

et

$$\begin{aligned}(S_nf)(x) - f(x) &= \int_0^1 [f(x-v) - f(x)]\,D_n(v)\,dv \\ &= \int_0^1 \left[\frac{f(x-v)-f(x)}{v}\,\frac{v}{\sin(\pi v)}\right][(2n+1)\pi v]\,dv.\end{aligned}$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{v\to 0} \frac{f(x-v)-f(x)}{v}\,\frac{v}{\sin(\pi v)} = -f'(x).\pi\,;$$

la fonction g_x définie par :

$$g_x(v) = \begin{cases} \frac{f(x-v)-f(x)}{v}\frac{v}{\sin(\pi v)} & \text{si } v \neq 0, \\ -\pi f'(x) & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

est donc continue sur $\mathbb{R}$, et de période 1.

Il suffit donc de montrer :

Théorème 4 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Pour toute fonction continue $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1, on a :*

$$\int_0^1 g(v)\sin(n\pi v)\,dv \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. g est uniformément continue sur $[0,1]$. Donc si l'on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x - x'| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(x')| \leqslant \varepsilon.$$

Soit :

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

une subdivision de $[0,1]$ telle que $\max_{0\leqslant j\leqslant N}(x_{j+1} - x_j) \leqslant \delta$.

La fonction <u>en escalier</u> $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ valant $g(x_j)$ pour $x_j \leqslant x < x_{j+1}$ (et $\varphi(1) = g(1)$) vérifie :

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |g(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc :

$$\left|\int_0^1 g(v)\,\sin(n\pi v)\,dv - \int_0^1 \varphi(v)\,\sin(n\pi v)\,dv\right| \leqslant \int_0^1 |g(v) - \varphi(v)|\,dv \leqslant \varepsilon.$$

Comme :

$$\left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(n\pi v)\, dv \right| = \left| \frac{1}{n\pi} [\cos(n\pi x_j) - \cos(n\pi x_{j+1})] \right| \leqslant \frac{2}{n\pi} \, ,$$

on a :

$$\int_0^1 \varphi(v) \, \sin(n\pi v)\, dv \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc :

$$\left| \int_0^1 g(v) \, \sin(n\pi v)\, dv \right| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant n_\varepsilon. \qquad \square$$

Si l'on veut approcher toutes les fonctions continues de période 1, il faut remplacer $S_n f$ par une autre expression. Il s'agit de faire des moyennes de Cesàro de $S_n f$.

Définition 5 *On appelle <u>noyau de Fejér</u> d'ordre n la fonction définie par :*

$$\boxed{F_n(v) = \frac{D_0(v) + D_1(v) + \cdots + D_n(v)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(v)} \, .$$

La <u>$n^{\text{ième}}$ somme de Fejér</u> de la fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1 est :

$$\boxed{(F_n f)(x) = \int_0^1 f(x-v)\, F_n(v)\, dv} \, .$$

Comme $\int_0^1 D_n(v)\, dv = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a aussi :

$$\int_0^1 F_n(v)\, dv = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La supériorité de F_n sur D_n est que l'on a :

Proposition 6 $\boxed{F_n(v) \geqslant 0}\,, \quad \forall v \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{Z}.$

Preuve. Pour $v \in \mathbb{Z}$, c'est clair : $D_k(v) = 2k+1$.

Pour $v \notin \mathbb{Z}$, on a :

$$F_n(v) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\pi v)} \sum_{k=0}^{n} \sin[(2k+1)\pi v].$$

Or :

$$2 \sin[(2k+1)\pi v] \sin(\pi v) = \cos(2k\pi v) - \cos[(2(k+1)\pi v] \, ;$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin[(2k+1)\pi v] = \frac{1}{2\sin(\pi v)}\Big(1-\cos[2(n+1)\pi v]\Big)$$
$$= \frac{1}{2\sin(\pi v)} \times 2\sin^2(n+1)\pi v\,,$$

et :

$$\boxed{F_n(v) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\pi v}{\sin(\pi v)}\right)^2},$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

On peut alors montrer le :

Théorème 7 (Théorème de Fejér (1905)) *Pour toute fonction continue* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de période* 1*, on a :*

$$F_n f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \underline{\textit{uniformément}} \textit{ sur } \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue et périodique, elle est <u>uniformément continue</u> sur $\mathbb{R}$:

$$(\exists \delta > 0) \qquad |x - x'| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/2.$$

Comme on peut diminuer δ sans changer l'implication ci-dessus, on peut supposer $\delta < 1/2$.

Notons que :

$$(F_n f)(x) - f(x) = \int_0^1 [f(x-v) - f(x)]\, F_n(v)\, dv$$
$$\underset{\text{périodicité}}{=} \int_{-1/2}^{1/2} [f(x-v) - f(x)]\, F_n(v)\, dv.$$

- Comme $F_n(v) \geqslant 0$, on a :

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} [f(x-v) - f(x)]\, F_n(v)\, dv\right| \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-v) - f(x)|\, F_n(v)\, dv$$
$$\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2}\, F_n(v)\, dv \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1/2}^{1/2} F_n(v)\, dv = \frac{\varepsilon}{2}.$$

- D'autre part, si $M = \sup_{v\in\mathbb{R}} |f(v)|$, on a :

$$\left|\int_{\delta}^{1/2} [f(x-v) - f(x)]\, F_n(v)\, dv\right| \leqslant 2M \int_{\delta}^{1/2} F_n(v)\, dv$$
$$\leqslant \frac{2M}{n+1}\int_{\delta}^{1/2} \frac{dv}{\sin^2(\pi v)} = \frac{2M}{n+1} C(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

pour $n \geqslant n_\varepsilon$.

De même, en augmentant au besoin n_ε, on a, pour $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\left| \int_{-1/2}^{-\delta} [f(x-v) - f(x)]\, F_n(v)\, dv \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

• Il en résulte que :

$$|(F_n f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant n_\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Définition 8 *On appelle* <u>*polynôme trigonométrique*</u> *toute combinaison linéaire* <u>*finie*</u> *des fonctions e_n, $n \in \mathbb{Z}$, définies par :*

$$e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tout polynôme trigonométrique P s'écrit donc :

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi i k t}.$$

Si P s'écrit ainsi, on a $\hat{P}(n) = 0$ pour $|n| > N$, et on dit que le polynôme trigonométrique P est <u>de degré $\leqslant N$</u>.

Les sommes de Fejér $F_n f$ sont des polynômes trigonométriques. On notera que $F_n f$ est de degré $\leqslant n$.

Le Théorème de Fejér entraîne donc en particulier que :

Corollaire 9 *Toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et de période 1 est limite* <u>*uniforme*</u> *d'une suite de polynômes trigonométriques.*

2 Fonctions intégrables.

Comme $|\mathrm{e}^{2\pi i n t}| = 1$, on peut définir :

$$\boxed{\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i n t}\, dt}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pour <u>toute $f \in \mathscr{L}^1(]0,1[)$</u>.

On a : $\boxed{|\hat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et :

Théorème 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Pour toute fonction intégrable $f \in \mathscr{L}^1(]0,1[)$, on a :*

$$\hat{f}(n) \underset{|n| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $g \in \mathscr{K}(]0,1[)$ telle que $\|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon/2$.

Comme $\operatorname{supp}(g)$ est compact et contenu dans $]0,1[$, la distance d de $\operatorname{supp}(g)$ au complémentaire (fermé) de $]0,1[$ est > 0, et $\operatorname{supp}(g) \subseteq [d, 1-d]$. La fonction g est donc nulle sur $]0,r]$ et sur $[1-r,1[$, et on peut la prolonger d'abord sur $[0,1]$ en posant $g(0) = g(1) = 0$, puis en une fonction continue $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1. Alors :

$$F_k g \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R};$$

il existe donc un entier $N_\varepsilon \geqslant 1$ tel que :

$$\begin{aligned} k \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|F_k g - g\|_1 &= \int_0^1 |(F_k g)(t) - g(t)|\, dt \\ &\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |(F_k g)(t) - g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot \end{aligned}$$

Alors, pour $|n| \geqslant N_\varepsilon + 1$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= |\hat{f}(n) - \widehat{(F_{N_\varepsilon} g)}(n)| \leqslant \|f - F_{N_\varepsilon} g\|_1 \\ &\leqslant \|f-g\|_1 + \|g - F_{N_\varepsilon} g\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Comme $\lambda(]0,1[) = 1 < +\infty$, on a $\mathscr{L}^2(]0,1[) \subseteq \mathscr{L}^1(]0,1[)$; donc $\hat{f}(n)$ est défini pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$. Mais $L^2(]0,1[)$ est un espace de **Hilbert**, et l'on peut donc exploiter les propriétés particulières des espaces de Hilbert.

En particulier, on a :

Théorème 11 *Dans $L^2(]0,1[)$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée.*

Remarque. Cela signifie que pour toute $f \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$, on a :

$$\|S_n f - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour simplifier l'écriture, on ne met plus de point au dessus de la fonction pour désigner sa classe d'équivalence presque partout ; on note donc de la même façon les fonctions et leur classe déquivalence presque partout.

On en déduit donc, puisque :

$$(f \mid e_n) = \int_0^1 f(t)\overline{e_n(t)}\, dt = \hat{f}(n)$$

le résultat suivant :

Corollaire 12 (Formule de Parseval) *Pour toute $f \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$, on a :*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\, dt}\ .$$

Preuve du Théorème 11. 1) On a :

$$\int_0^1 e_n(t)\,\overline{e_k(t)}\,dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i(n-k)t}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k\,; \end{cases}$$

donc $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé.

2) Pour voir que c'est une base orthonormée, il faut montrer que l'espace vectoriel engendré par les e_n, $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes trigonométriques, est <u>dense</u> dans $L^2(]0,1[)$. Or voir cela revient à voir que si $g \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$ est telle que :

$$(g \mid e_n) = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

alors $g = 0$ (presque partout).

Mais si $g \perp e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors g est orthogonale à tous les polynômes trigonométriques ; en particulier, pour toute $f \in \mathscr{K}(]0,1[)$ (prolongée en fonction continue sur $\mathbb{R}$ de période 1), on a :

$$g \perp F_n f\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais :

$$\|f_n f - f\|_2^2 = \int_0^1 |(F_n f)(v) - f(v)|^2\,dv \leqslant \sup_{v\in\mathbb{R}} |(F_n f)(v) - f(v)|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,;$$

donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 g(v)\overline{f(v)}\,dv\right| &= \left|\int_0^1 g(v)\left[\overline{f(v)} - \overline{(F_n f)(v)}\right]dv\right| \\ &\leqslant \|g\|_2\,\|f - F_n f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $(g \mid f) = 0$, et ceci pour toute $f \in \mathscr{K}(]0,1[)$.

Comme $\mathscr{K}(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, on obtient $\dot{g} = 0$, c'est-à-dire $g = 0$ presque partout. □

Corollaire 13 *Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est <u>continûment dérivable</u> sur $\mathbb{R}$, de période 1, alors la suite $(S_n f)_{n\geqslant 0}$ converge <u>normalement</u> vers f. En d'autres termes, la* série de Fourier *de f converge normalement vers f.*

Preuve. En intégrant par parties, on trouve, pour $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt &= \left[\frac{f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}}{-2\pi in}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi in}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi in}\widehat{f'}(n).\end{aligned}$$

Comme f' est continue, on a $f' \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$; donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 < +\infty$; d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les séries:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| &\leqslant |\hat{f}(0)| + \sum_{n\neq 0} |2\pi in\widehat{f'}(n)| \\ &\leqslant |\hat{f}(0)| + \Big(\sum_{n\neq 0} |\widehat{f'}(n)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{4\pi^2 n^2}\Big)^{1/2} < +\infty. \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque. La formule de Parseval dit que la *transformation de Fourier*, définie par $\mathscr{F} f = \hat{f}$ pour $f \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$, envoie $L^2(]0,1[)$ dans $\ell_2(\mathbb{Z})$, et que c'est une **isométrie**. On a, en particulier : si $f \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$, et si $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ presque partout.

On remarquera aussi que, réciproquement, pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, la formule de Parseval dit que la suite $\big(\sum_{n=-k}^{k} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi int}\big)_{k\geqslant 0}$ converge dans $L^2(]0,1[)$: il existe $f \in \mathscr{L}^2(]0,1[)$ telle que :

$$\Big\|\sum_{n=-k}^{k} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi int} - f\Big\|_2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(grâce au fait que $L^2(]0,1[)$ est **complet**), et que $\hat{f}(n) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela signifie que $\mathscr{F}$ est surjective : c'est un **isomorphisme** isométrique de $L^2(]0,1[)$ sur $\ell_2(\mathbb{Z})$ (**Théorème de Riesz-Fisher [1907]**).