UNIVERSITÉ D'ARTOIS
FACULTÉ JEAN PERRIN
Année 2014/15

LICENCE DE MATHÉMATIQUES
L2 - Semestre 3

SÉRIES ET INTÉGRALES

Examen du mercredi 7 janvier 2015. 3h.

Exercice 1 : (a) Déterminer la nature des séries de terme général :

$$x_n = \frac{\sin(n)}{n^2+\cos^2(n)} \qquad y_n = \Big(\frac{2n+\mathrm{e}^{-n}}{3n+\sin(n)}\Big)^n \qquad z_n = \frac{n^{2015}\ln(n)}{n!} \qquad t_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$$

(b) Soit $u_n = \frac{x^n}{2n-\mathrm{e}^{-n}+1}$. Déterminer, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum u_n$.

(c) En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$ diverge. En déduire la nature de la série de terme général $\ln\big(1+\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}\big)$

Exercice 2 : Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$.

(b) En déduire que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -2$ et $b = 1$. (Si vous n'avez pas trouvé α et/ou β, expliquer au moins la méthode.)

(c) Calculer $\sum_{n\geq 0}\Big(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\Big)$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$

(a) Justifier la convergence des I_n, et calculer I_1.

(b) En tentant de calculer I_n par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.

(c) On pose $u_n = \sqrt{n} I_n$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Montrer, par un développement limité, que la série $\sum v_n$ converge.

(d) En déduire que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_n$ converge, et montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $I_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, en chacune des bornes incriminées, en discutant au besoin suivant la valeur des paramètres.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^\alpha}}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^a\,\mathrm{e}^{-x}}{1+x^b}\,\mathrm{d}x \quad (a,b\in\mathbb{R}) \qquad \int_0^{+\infty} \ln\big(1+\frac{1}{x^\alpha}\big)\,\mathrm{d}x \quad (\alpha>0)$$

Exercice 4 : On considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos(x^3)}{x-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

(a) Déterminer sa nature en 0.

(b) Par le théorème d'Abel, montrer sa convergence en $+\infty$.

(c) Montrer les (in)égalités suivantes :

$$\left|\int_{(\frac{\pi}{2}+n\pi)^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi)^{\frac{1}{3}}} x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \left|\int_{(\frac{\pi}{2}+n\pi)^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi)^{\frac{1}{3}}} \frac{x^2\cos(x^3)}{x-\sin(x)}\,\mathrm{d}x\right| \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi)^{\frac{1}{3}}+1}$$

(d) A-t-on convergence absolue en $+\infty$? Justifier soigneusement.