

Exercices - feuille 1

Exercice 1 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de période 2π intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

1) a) On pose $\phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ et $\Phi_x(t) = \int_0^t |\phi_x(u)| du$. Montrer que si x est un point de Lebesgue de f , alors $\Phi_x(t)/t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

b) En déduire que, pour ces x :

$$\frac{1}{\log n} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\Phi_x(t)}{t^2} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

2) Soit:

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)}$$

le noyau de Dirichlet d'ordre n .

Vérifier que l'on peut écrire $D_n(t) = 2 \frac{\sin nt}{t} + \psi_n(t)$, où:

$$\psi_n(t) = \cos(nt) + \left(\frac{1}{\tan(t/2)} - \frac{2}{t} \right) \sin(nt)$$

est uniformément bornée sur $[-\pi, \pi]$, par une constante $C > 0$ ne dépendant pas de n .

3) On pose:

$$S_n f(x) = \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt.$$

Montrer que:

$$\left| S_n f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f| dt.$$

4) En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ (dépendant de f et de x) telle que:

$$|S_n f(x)| \leq C_1 + \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin nt}{t} dt \right|.$$

5) En écrivant:

$$|S_n f(x)| \leq C_1 + \frac{n}{\pi} \int_0^{1/n} |\phi_x(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{1/n}^{\pi} \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt = C_1 + \frac{n}{\pi} \Phi_x(1/n) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\Phi_x(t)}{t} \right]_{1/n}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\Phi_x(t)}{t^2} dt,$$

en déduire que:

$$\frac{S_n f(x)}{\log n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

en tout point de Lebesgue x de f .

Exercice 2 Non réflexivité de H^1 . Soit J l'injection canonique de $X = C(\mathbb{T})/\bar{A}_0$ (qui est préduel de H^1) dans son bidual X^{**} . Soit $f(e^{2i\pi t}) = (1 - 2t) \in L^\infty(\mathbb{T})$, où $t \in [0, 1[$.

1) On suppose que J est surjective. Montrer qu'il existe g dans $C(\mathbb{T})$ tel que $\hat{g}(0) = 0$ et $\hat{g}(n) = \frac{i}{4\pi n}$ pour $n \geq 1$. Aboutir à une contradiction (on rappelle le résultat classique que l'on pourra justifier : pour toute fonction continue h , $\|\sum_{n=0}^N \hat{h}(n)e_n\|_\infty = o(\log N)$).

2) Conclure que X donc H^1 n'est pas réflexif.

Exercice 3 On veut montrer que H^∞ n'est pas complété dans $L^\infty(\mathbb{T})$. On suppose qu'il existe une projection continue π de $L^\infty(\mathbb{T})$ sur H^∞ . Soit f un polynôme trigonométrique et $h \in L^1(\mathbb{T})$, on pose

$$Q_f(h) = \int_{\mathbb{T}} \pi(f_{-t}) * h_t(0) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n) \hat{h}(n) \pi(\widehat{e_n})(n).$$

- a) Vérifier que les deux expressions ci-dessus sont bien définies et égales.
- b) En déduire que l'on définit ainsi une application continue de l'ensemble des polynômes trigonométriques, muni de la norme sup, dans le dual de $L^1(\mathbb{T})$: $f \mapsto Q_f$.
- c) Justifier que pour tout polynôme trigonométrique f , il existe $F_f \in L^\infty(\mathbb{T})$ tel que : $\|F_f\|_\infty \leq \|\pi\| \cdot \|f\|_\infty$ et $\forall h \in L^1(\mathbb{T})$, $Q_f(h) = F_f * h(0)$.
- d) En déduire que pour tout polynôme trigonométrique f , on a $\|\sum_{n \geq 0} \hat{f}(n)e_n\|_\infty \leq \|\pi\| \cdot \|f\|_\infty$.
- e) Aboutir à une contradiction (on pourra utiliser la fonction f de l'exo 2.).

Exercice 4 Soit T un opérateur de X^* dans Y^* .

1) On suppose que $T = S^*$ où $S : Y \rightarrow X$. Montrer que T est continu de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ dans $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$.

2)a) Justifier que l'espace de toutes les formes linéaires continues sur X^* pour la topologie préfaible est $j_X(X) \sim X$.

b) On suppose que T est continu de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ dans $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$. Déduire du a. que $T = S^*$ où $S : Y \rightarrow X$.

Exercice 5 Soit T un opérateur de X dans Y .

1) On suppose que T est faiblement compact. Montrer que $T^{**}(X^{**}) \subset j_Y(Y)$. Ind. : Davis-Figiel-Johnson-Pelczyński.

2) On suppose que $T^{**}(X^{**}) \subset j_Y(Y)$. Justifier que $T^{**}(B_{X^{**}})$ est préfaiblement compacte dans Y^{**} . En déduire que $T(B_X)$ est faiblement compacte et que T est faiblement compact.

Exercice 6 1) Soit G un semi-groupe (la loi est notée multiplicativement). Une moyenne invariante à gauche sur G est une forme linéaire M sur $\ell^\infty(G)$ vérifiant :

i) $M(1) = 1$ ii) $M(f) \geq 0$ pour $f \geq 0$ iii) $M(f_g) = M(f)$ pour tout $g \in G$, où $f_g(t) = f(gt)$.

On remarquera que alors M est continue avec $\|M\| = 1$ (justifier). Dans la suite G est supposé être un groupe abélien. On va justifier l'existence de telles moyennes pour G . Soit $W = \{\varphi \in (\ell^\infty(G))^* \mid \varphi \geq 0 \text{ et } \varphi(1) = 1\}$.

a) Montrer que W est convexe et compact pour la topologie préfaible sur $(\ell^\infty(G))^*$.
 G agit sur W par $\varphi \mapsto \tau_g(\varphi)$ avec $\tau_g(\varphi)(f) = \varphi(f_g)$, où $f \in \ell^\infty(G)$.

b) Vérifier que $\tau_g : W \rightarrow W$ est bien définie et continue.

c) Montrer que pour tout $g \in G$, l'ensemble F_g des points fixes de τ_g est non vide, convexe et compact.

d) Montrer que $F_g \cap K$ est non vide pour tout $g \in G$ et tout compact convexe K , invariant par τ_g . En déduire que $\bigcap_{g \in G} F_g$ est non vide et conclure.

2) D'après le 1., il existe une moyenne invariante M sur le tore $\mathbb{T}$. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{T}$, alors $M(f) = \hat{f}(0)$.

Exercice 7 1) Soit $T : L^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ défini par $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que T n'est pas faiblement compact. Indication : considérer la suite des noyaux de Fejer. Supposons que T est w-compact. En introduisant la fonction f de l'exercice 2 (on remarquera que T s'exprime en terme de convolution à l'aide de la fonction f), obtenir que cette fonction serait égale presque partout à une fonction continue.

2) Soit $T : L^2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ défini par $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que T est compact (penser à Ascoli).

b) Montrer que T n'est pas p -sommant (et ce pour tout $p \geq 1$) : on pourra utiliser les fonctions (particulières du système de Haar), égales à 2^n sur $[0, 2 \cdot 4^{-(n+1)}[$, à -2^n sur $[2 \cdot 4^{-(n+1)}, 4^{-n}]$ et nulles ailleurs (on pourra remarquer que cela forme une famille orthonormale de L^2). (pour cette question, attendre d'avoir fait le chapitre correspondant)