Licence Math-Info. Université d'Artois. 2021-2022.

EXAMEN CALCULUS 1 - session 1 Éléments de correction

Exercice 1. Soit $x > 1$.

$$x^{\frac{1}{\ln(x)}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(x)\right) = \exp(1) = \mathrm{e} \ .$$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left|x^3 - \frac{7}{2}\right| \leqslant \frac{9}{2} \iff -\frac{9}{2} \leqslant x^3 - \frac{7}{2} \leqslant \frac{9}{2} \iff -\frac{9}{2} + \frac{7}{2} \leqslant x^3 \leqslant \frac{9}{2} + \frac{7}{2} \cdot$$

Or $-\dfrac{9}{2} + \dfrac{7}{2} = -1$ et $\dfrac{9}{2} + \dfrac{7}{2} = 8$.

Par ailleurs $-1 \leqslant x^3 \leqslant 8$ si et seulement si $\sqrt[3]{-1} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{8}$.

Conclusion: l'ensemble des solutions est $[-1; 2]$.

Exercice 3. Limites:

Pour l'étude de la première limite: $\lim\limits_{x\to 0} \ln(|\sin(x)|)$, on remarque que $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ donc

$$\lim_{x\to 0} |\sin(x)| = 0^+ \ .$$

Comme $\ln(t)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0^+, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \ln(|\sin(x)|) = -\infty \ .$$

Pour $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\big(\ln(x)\big)^5}{\sqrt{x}} - x^7 \mathrm{e}^{-x}$, on invoque les résultats sur les croissances comparées.

On voit que

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^5}{\sqrt{x}} = \frac{\big(\ln(x)\big)^5}{x^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{10}}}\right)^5 \longrightarrow 0 \ .$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^7 \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Au final,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^5}{\sqrt{x}} - x^7 \mathrm{e}^{-x} = 0 \ .$$

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(\lambda x)}{x}$ lorsque $x > 0$ et $f(x) = \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^2\right)$ lorsque $x \leqslant 0$.

La fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto \dfrac{\sin(\lambda x)}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ puisqu'elle est définie sur cet intervalle et s'exprime à l'aide d'une formule impliquant des fonctions usuelles. En effet sin est définie sur $\mathbb{R}$ et x ne s'annule pas $]0, +\infty[$.

La fonction $x \in]-\infty, 0] \mapsto \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^2\right)$ est continue sur $]-\infty, 0]$ puisqu'elle est définie sur cet intervalle et s'exprime à l'aide d'une formule impliquant des fonctions usuelles. En effet ln est définie sur $]0, +\infty[$ et $x^2 + \mathrm{e}^2 \geqslant \mathrm{e}^2 > 0$.

Par ailleurs,

Si λ est non nul, en écrivant $t = \lambda x$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\lambda x)}{x} = \lambda \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lambda$$

et c'est trivialement encore vrai si $\lambda = 0$.

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lambda.$$

Par ailleurs

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^2\right) = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2\ln(\mathrm{e}) = 2.$$

Ainsi, f est continue si et seulement si $\lambda = 2$.

Exercice 5. a) (cf cours/TD)

- $g'(x) = \dfrac{-2x}{(3x^2+2)^2} \qquad$ pour $x \in \mathbb{R}$
- $h'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \exp\left(\sqrt{x^2+1}\right) \qquad$ pour $x \in \mathbb{R}$

b) Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (par dérivation des fonctions composées)

$$f'(x) = -\sin(x).\cos(\cos(x))\ .$$

En particulier, $f'(\pi/2) = -1$ et, comme $f(\pi/2)) = 0$, on obtient l'équation $Y = -(X - \pi/2)$ ou encore

$$Y = -X + \frac{\pi}{2}$$

Exercice 6. a) Les intégrales suivantes sont bien définies (chacune est une intégrale d'une fonction continue sur un segment).

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}\,dx = \Big[\ln(2-\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(2)\ .$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^{-x}\,dx = \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx \qquad$ (après intégration par parties)

or $\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{1} + = -\mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$
et
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$
Finalement,

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x}\,dx = -\frac{2}{\mathrm{e}}\cdot$$

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\left(1+x\right)^{\frac{5}{2}}}\,dx$ est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ on obtient

$$1 + x = \frac{2}{1+t^2}$$

et

$$1 - x = \frac{2t^2}{1+t^2}$$

donc, comme $x = 1$ pour $t = 0$ et $x = 0$ pour $t = 1$,

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\left(1+x\right)^{\frac{5}{2}}}\,dx = \int_1^0 \left(\frac{2t^2}{1+t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1+t^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right) dt$$

soit

$$I = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\cdot$$