

## EXAMEN - session 2

### CALCULUS 1

2h

*Les calculatrices et les documents sont interdits.  
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

(Barème indicatif=2,5+3+4,5+3,5+7 points)

**Cours** Rappeler (sans démonstration)

- a) L'inégalité triangulaire.
- b) L'inégalité triangulaire inverse: pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a  $|a - b| \geq \dots$
- c) La formule du binôme de Newton: pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  et tout entier  $n \geq 1$ , on a  $(a + b)^n = \dots$

**Exercice 1.** Résoudre les inéquations suivantes:

- (a)  $4x^2 + 4x - 3 > 0$  où  $x \in \mathbb{R}$
- (b)  $|5x^2 - 3x - 23| < 3x^2 - 5x + 17$  où  $x \in \mathbb{R}$

**Exercice 2.** Soit  $g(x) = \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 5}$ .

- a) Déterminer le domaine de définition de  $g$  et son domaine de dérivabilité  $\mathcal{D}$ .
- b) Calculer la dérivée de  $g$  sur  $\mathcal{D}$ .
- c) Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$  à la courbe représentative de  $g$ .
- d) Justifier que pour tout  $x \in \mathcal{D}$ , on a  $|g'(x)| \leq \frac{3}{8}$  et que l'on peut trouver une constante  $C$  telle que pour tous  $u, v \in \mathcal{D}$ , on a

$$|g(u) - g(v)| \leq C |u - v|.$$

**Exercice 3.** Que valent les limites suivantes ? (on justifiera la réponse)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{1998} + 2x^{2018} + 4}{x^{18}(1984 - x^{2000})}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2)^{\frac{1}{2023}} \ln \left( \frac{1}{x - 2} \right)$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} |x| \cos \left( \frac{1}{x} \right)$

**Exercice 4.**

- (i) Calculer les intégrales suivantes (attention à la rédaction)

$$\bullet \int_0^1 \frac{2023 x^{2022}}{1 + x^{2023}} dx \qquad \bullet \int_0^1 (2x - 5) e^x dx$$

- (ii) Calculer l'intégrale  $\int_1^{\sqrt[3]{2}} x^5 \cdot (x^3 - 1)^{\frac{2}{3}} dx$  en effectuant le changement de variable  $t = x^3 - 1$ .