

EXAMEN - session 1

CALCULUS 1

2h

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

(Barème indicatif=3+2+5,5+3,5+7 points)

Exercice 1. Résoudre les inéquations suivantes:

(a) $4x^2 + 3x - 1 > 0$ où $x \in \mathbb{R}$

(b) $|x^2 + 3x - 1| < 3x^2$ où $x \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)$.

Exercice 3. On considère $f(x) = \ln\left(1 + (\sin(x))^2\right)$.

a) Justifier rapidement que son domaine de définition est \mathbb{R} et que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ à la courbe de représentative de f .

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(x)| \leq 1$. En déduire que pour tous réels $b > a$, on

a

$$\ln\left(\frac{1 + (\sin(b))^2}{1 + (\sin(a))^2}\right) \leq b - a.$$

Exercice 4. Que valent les limites suivantes ? (on justifiera la réponse)

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^{2022} - 2x^{2023} + 2004}{2003 - x^{2023}}$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\frac{1}{2022}} \ln(x - 1)$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \sqrt{|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 5.

(i) Calculer les intégrales suivantes (attention à la rédaction)

• $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x+1}} dx$

• $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$

• $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) dx$

(ii) Calculer l'intégrale $\int_1^{\sqrt[3]{2}} x^5 \cdot \sqrt{x^3 - 1} dx$ en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x^3 - 1}$.