Licence Math-Info.
Université d'Artois. 2020-2021.

Examen - Session 2

Espaces Vectoriels Normés et Topologie

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours (10.5 points)

1) Montrer que, dans un espace vectoriel normé, une suite convergente est nécessairement bornée.

2) Donner la définition d'une partie ouverte et d'une partie fermée d'un espace vectoriel normé.

3) Montrer qu'une boule fermée est fermée.

4) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

(i) Donner une définition d'une partie compacte.

(ii) Montrer que l'image d'une partie compacte par une application continue est compacte.

5) Soit E un espace vectoriel normé.

(i) Rappeler la définition de l'intérieur $\mathring{A}$ et de l'adhérence (=fermeture) $\overline{A}$ d'une partie $A \subset E$.

(ii) Comparer (en terme d'inclusion) $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et A. *(pas de preuve demandée)*

(iii) On se place dans $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue). Donner un exemple de partie $A \subset \mathbb{R}$ telle que $\mathring{A} = \varnothing$ et $\overline{A} = \mathbb{R}$ *(pas de preuve demandée).*

Exercice 1(4 points)

Dans les questions suivantes, on munit chacun des espaces $\mathbb{R}^N$ $(N \in \{1; 2; 3\})$ d'une norme. On s'intéresse à la nature topologique de différentes parties.

1) Expliquer pourquoi il n'est pas nécessaire de préciser avec quelles normes on travaille.

2) Justifier que la partie $\big\{(x, y, z)\,|\,\ln(1 + x^2 + y^2) < z\big\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

3) On considère $S = \big\{(x, y)\,|\,x^2 + y^4 = 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que S est borné.

b) Justifier que S est fermé.

c) Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 (2 points)

Soient $d \geqslant 1$ un entier et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 3 (4 points)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

1) Justifier que $\|P\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, dt$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

L'espace E désigne $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour $d \geqslant 1$, l'espace E_d désigne $\mathbb{R}_d[X]$ (polynômes de degré inférieur à d) muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

2) Montrer que pour tout $d \geqslant 1$, l'application linéaire suivante est continue:

$$\begin{array}{cccc} \Phi_d : & E_d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

Puis montrer que $|||\Phi_d||| \geqslant d + 1$ *(Indication: on pourra s'intéresser à X^d)*

3) Est-ce que l'application linéaire suivante est continue ?

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$