Examen - Session 1 – Eléments de correction
Espaces Vectoriels Normés et Topologie

Exercice 1 cf TD.

Exercice 2 cf cours/TD

1) cf cours.

2) (cf TD) Puisque Φ est linéaire, on utilise les caractérisations des applications linéaires continues.

Ainsi pour toute suite bornée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge puisque $O(2^{-n})$ et la série géométrique de raison $1/2$ converge (car $1/2 < 1$). De plus

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty$$

car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

On a donc $|\Phi(u)| \leqslant \|u\|_\infty$ et on en déduit que $|||\Phi||| \leqslant 1$.

Réciproquement, si on considère la suite v contante à 1, elle est bien dans X avec $\|v\|_\infty = 1$ et

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

donc $|||\Phi||| = 1$.

Exercice 3

On fixe $N \geqslant 1$. Soit V l'espace vectoriel engendré par les monômes $X, \dots, X^N$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_N[X]$, de dimension (finie !) N.

Par ailleurs pour $P \in V$, les quantités $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \Big|P(x)\Big|$ et $\nu_\infty(P) = \sup_{x\in[-1,1]} \Big|P(x)\Big|$ définissent des normes sur V: c'est le cours pour la première; pour la seconde, ce sont les mêmes arguments.

Comme V est de dimension finie, ces normes sont équivalentes. En particulier, il existe $C_N > 0$ tel que

$$\text{pour tout } P \in V, \text{ on a} \qquad \nu_\infty(P) \leqslant C_N \|P\|_\infty$$

ce qui est le résultat cherché.

Exercice 4

1) cf cours.

2) cf TD