Licence Math-Info.
Université d'Artois. 2020-2021.

Examen - Session 1

Espaces Vectoriels Normés et Topologie

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours (6.5 points)

1) Donner la définition d'une partie ouverte.

2) Montrer qu'une boule ouverte est ouverte.

3) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

(i) Donner une définition d'une partie connexe.

(ii) Donner la définition d'une partie connexe par arcs.

(iii) Montrer que tout ouvert connexe est connexe par arcs.

4) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $S \subset E$ (non vide) et $f : S \to F$ continue. Montrer que pour tout ouvert Ω (dans F), il existe un ouvert ω (dans E) tel que $f^{-1}(\Omega) = \omega \cap S$.

Exercice 1 (2 points)

Soient $d \geqslant 1$ un entier et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 2 (3.5 points)

On note X l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1) Justifier que $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left|a_n\right|$ définit bien une norme sur X.

2) Montrer que l'application linéaire suivante est continue et que $|||\Phi||| = 1$.

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \end{array}$$

Exercice 3 (1.5 points)

Montrer que pour tout $N \geqslant 1$, il existe $C_N > 0$ tel que

$$\text{Pour tous } a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}, \text{ on a} \qquad \sup_{x\in[-1,1]} \left| \sum_{j=1}^{N} a_j x^j \right| \leqslant C_N \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{N} a_j x^j \right|$$

Exercice 4 (6.5 points)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1) Soit $A \subset E$, non vide.

(i) Rappeler la définition de la distance de $x \in E$ à A, notée $d(x, A)$.

(ii) Montrer que $x \in E$ vérifie $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

(iii) Soient $x \in E$ et K une partie compacte (non vide) de E. Justifier qu'il existe $v \in K$ tel que $\|x - v\| = d(x, K)$.

2) On suppose que la boule unité fermée $\overline{B}_E$ de E est compacte. Le but est de montrer que E est nécessairement de dimension finie.

On suppose que E est de dimension infinie.

a) Justifier qu'il existe un vecteur $\mathrm{e}_1 \in E$ de norme 1.

On suppose avoir construit $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \in \overline{B}_E$ vérifiant $\|\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j\| \geqslant 1$ pour $i \neq j$. On considère $F = vect\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$.

b) (i) Justifier que l'on peut choisir $a \in E$ tel que $d(a, F) > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $\|a - y\| = d(a, F) > 0$.

c) Montrer que le vecteur $\mathrm{e}_{n+1} = \dfrac{1}{\|a - y\|}(a - y)$ vérifie $\|\mathrm{e}_{n+1} - z\| \geqslant 1$ pour $z \in F$.

d) Conclure.