Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2019-2020.
24/06/2020.

EXAMEN 2

Espaces Vectoriels Normés et Topologie

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (5,5 points)

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) ou $\mathbb{C}$ (muni du module).

1) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$ une application.

a) Compléter cette affirmation: f est $\cdots \iff$ pour tout fermé Φ de F, $f^{-1}\big(\Phi\big) \cdots$

b) Démontrer ce résultat.

2) Montrer que l'image continue d'un compact est compacte.
(on écrira d'abord un énoncé mathématique précis)

Exercice 1 (5 points=1+4)

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

1) On suppose que f est continue. Quelle est la nature topologique de $\mathrm{Ker}\,(f)$? (justifier)

2) On suppose que le noyau de f est fermé et que f n'est pas continue. En particulier f n'est pas identiquement nulle donc il existe $c \in E$ tel que $f(c) = 1$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dans E vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$, $\|a_n\| = 1$ et $f(a_n) \geqslant n$.

b) Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = c - \dfrac{1}{f(a_n)} a_n$.

(i) Que vaut $f\big(u_n\big)$? Est-ce que $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge ? (vers quoi éventuellement)

(ii) Conclure.

Exercice 2 (1,5 points)

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel, distinct de E. Montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 3 (4,5 points=1,5+2+1)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes (à coefficients réels), et pour $d \geqslant 1$, on considère le sous-espace $E_d = \mathbb{R}_d[X]$, c'est à dire l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On rappelle qu'on définit bien une norme sur E en posant $\|P\| = \sup\{|P(t)|\,;\ t \in [0,1]\}$ pour $P \in E$.

On considère aussi la norme $\|P\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |P(t)|\,dt$ pour $P \in E$.

1) Justifier que $\|\cdot\|_1$ définit bien une norme sur E.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\left\|X^n\right\|_1$? Est-ce que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur E ?

3) Montrer qu'il existe $C_d > 0$ tel que

$$\forall P \in E_d\,, \qquad \sup\{|P(t)|\,;\ t \in [0,1]\} \leqslant C_d \int_{-1}^{1} |P(t)|\,dt$$

Exercice 4 (4 points=2,5+1,5)

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes non vides de E.

1) On veut montrer que $A \times B$ est une partie connexe de $E \times E$.

Soit f une application continue de $A \times B$ dans $\{0,1\}$.

a) Montrer que pour tout $b \in B$, il existe $\varepsilon(b) \in \{0,1\}$ tel que:

$$\forall a \in A,\ f(a,b) = \varepsilon(b).$$

b) Montrer que $b \in B \mapsto \varepsilon(b)$ est continue et conclure.

2) Montrer que $A + B$ est une partie connexe de E.