EXAMEN **1** – *Éléments de correction*

Espaces Vectoriels Normés et Topologie

Exercice 1

1) a) Il suffit décrire ce qu'il se passe. Pour $m \geqslant 1$, d'une part $v^{(m)}$ est dans c_0 (termes nuls à partir de $m+1$ donc converge vers 0 trivialement) et d'autre part on a par définition

$$\left\|v^{(m)} - u\right\|_\infty = \sup_{n>m} |u_n|$$

or $u \in c_0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ainsi $\lim\limits_{m\to+\infty} \sup\limits_{n>m} |u_n| = 0$.

Pour détailler: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, on a $|u_n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi pour $m \geqslant N_0$, tous les $n > m$ vérifient $n \geqslant N_0$ donc $|u_n| \leqslant \varepsilon$ donc $\sup\limits_{n>m} |u_n| \leqslant \varepsilon$.

A fortiori $\left\|v^{(m)} - u\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

b) En fait la remarque du début du 1.a. justifie que, pour tout $m \geqslant 1$, la suite $v^{(m)}$ est dans c_{00}. Par ailleurs la question précédente établit que toute suite de c_0 est limite d'une suite de $c_{00} \subset c_0$. D'après le critère séquentiel du cours, c_{00} est donc dense dans $\big(c_0, \|\cdot\|_\infty\big)$.

2) cf TD (remplacer 2 par 3).

Exercice 2

cf TD

Exercice 3

1) cf TD

2) L'application qui à $P \in E$ associe $P(2) \in \mathbb{R}$ est clairement définie et linéaire. Comme E est de dimension finie $(d+1)$, cette application est continue. La caractérisation des applications linéaires continues donne le résultat.

Alternative: si on voulait utiliser le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, on pouvait le faire:

Par exemple, on considère la norme $N(P) = \sup\{|P(t)|\,;\ t \in [0,2]\}$ pour $P \in E$. On justifie que c'est une norme sur E (mêmes arguments que pour $\|\cdot\|$). Comme E est de dimension finie, les normes $\|\cdot\|$ et N sont équivalentes. En particulier, il existe $C > 0$ telle que pour tout $P \in E$:

$$|P(2)| \leqslant N(P) \leqslant C\|P\|.$$

Exercice 4

1) a) Cf cours.

b) (i) Cf cours.

(ii) $\omega_1 = \{x \in E \mid d(x, K_1) < d/3\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, d/3[$ par l'application continue $d(., K_1)$ (lipschitzienne - cf 1.a.- donc continue). C'est donc un ouvert de E.

(iii) De la même façon, on définit l'ouvert $\omega_2 = \{x \in E \mid d(x, K_2) < d/3\}$. Evidemment tout $x \in K_1$ vérifie $d(x, K_1) = 0$ donc est dans ω_1. On a donc $K_1 \subset \omega_1$. De même $K_2 \subset \omega_2$. Par ailleurs $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$ sinon un x commun vérifierait $d(x, K_1) < d/3$ et $d(x, K_2) < d/3$ donc on aurait $a_1 \in K_1$ et $a_2 \in K_2$ tels que $\|x - a_1\| < d/3$ et $\|x - a_2\| < d/3$. Par l'inégalité triangulaire, $\|a_1 - a_2\| < 2d/3 < d$ contredit la définition de d.

2) a) Soit $i \in \{1; 2\}$. Comme F_i est un fermé de C, c'est l'intersection de C et d'un fermé de E. Mais C est une intersection de compacts, c'est donc un compact de E. Ainsi F_i est un fermé de E, inclus dans un compact: c'est un compact. On applique alors le 1.b.(iii).

b) Notons $\Phi = E \backslash (\omega_1 \cup \omega_2)$: c'est un fermé de E (complémentaire d'un ouvert). On sait par hypothèse que $C \cap \Phi = \varnothing$ puisque $C \subset \omega_1 \cup \omega_2$.

Autrement dit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (C_n \cap \Phi) = \varnothing$: c'est une intersection décroissante de compacts qui est vide donc d'après le cours, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $C_{n_0} \cap \Phi = \varnothing$.

On a donc $C_{n_0} \subset \omega_1 \cup \omega_2$.

c) Le fait que C soit compact est clair depuis de début (nous l'avons d'ailleurs déjà signalé).

Comme C_{n_0} est connexe et que $C_{n_0} \subset \omega_1 \cup \omega_2$ avec des ω_i disjoints, on a $C_{n_0} \subset \omega_1$ ou $C_{n_0} \subset \omega_2$. Disons $C_{n_0} \subset \omega_1$ pour fixer les idées. Ainsi $C \subset C_{n_0} \subset \omega_1$. Mais comme $\omega_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $C = F_1 \cap F_2$, on a en fait $C = C \cap \omega_1 = F_1$.

Ainsi C est connexe.