Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2019-2020.
16/12/2019.

EXAMEN 1

Espaces Vectoriels Normés et Topologie

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (9 points=2,5+3+3,5)

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) ou $\mathbb{C}$ (muni du module).

1) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$ une application.

a) Compléter cette affirmation: f est $\cdots \iff$ pour tout ouvert ω de F, $f^{-1}\big(\omega\big) \cdots$

b) Démontrer ce résultat.

2) Enoncer et démontrer le théorème de Heine.

3) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a) Donner les définitions de "partie connexe" et de "partie connexe par arcs".

b) Laquelle des deux implications "connexe $\Rightarrow$ connexe par arcs" ou "connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe" est toujours vraie ? La démontrer.

Exercice 1 (3,5 points=2+1,5)

On note c_0 l'espace vectoriel des suites réelles convergentes vers 0. On rappelle que $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big|a_n\big|$ définit bien une norme sur c_0.

1) On note c_{00} l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

a) Soit $u = \big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Pour $m \geqslant 1$, on considère $v^{(m)}$ la suite dont le n^{ieme} terme (où $n \in \mathbb{N}$) est égal à u_n lorsque $n \leqslant m$, et vaut 0 sinon.
Montrer que $\big(v^{(m)}\big)_{m\geqslant 1}$ converge vers u dans l'espace $\big(c_0, \|\cdot\|_\infty\big)$.

b) Montrer que c_{00} est dense dans $\big(c_0, \|\cdot\|_\infty\big)$.

2) Montrer que l'application suivante est continue.

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} \end{array}$$

Indication: on remarquera que c'est une application linéaire

Exercice 2 (1,5 points)

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel, distinct de E. Montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 3 (2 points)

Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d (où $d \geqslant 1$).

1) Justifier qu'on définit bien une norme sur E en posant $\|P\| = \sup\{|P(t)|\,;\ t \in [0,1]\}$ pour $P \in E$.

2) Montrer qu'il existe $C_d > 0$ tel que

$$\forall P \in E\,, \qquad |P(2)| \leqslant C_d \sup\{|P(t)|\,;\ t \in [0,1]\}$$

Exercice 4 (6,5 points=(1+2,5)+(0,5+1,5+1)

Soient E un espace vectoriel normé.

1) Soit A une partie non vide E.

On rappelle que pour $x \in E$, on définit $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$.

a) Redémontrer ce résultat du cours: l'application $x \in E \longmapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

b) On considère deux parties compactes disjointes de E: K_1 et K_2.

(i) Rappeler la définition de $d(K_1, K_2)$ et justifier que $d(K_1, K_2) > 0$ (on la notera d dans la suite de cette question).

(ii) Justifier que $\omega_1 = \big\{x \in E \mid d(x, K_1) < d/3\big\}$ est un ouvert.

(iii) En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints contenant l'un K_1 et l'autre K_2.

2) Soient $\big(C_n\big)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de parties connexes et compactes (non vides) de E. On veut montrer que $C = \bigcap_{n \geqslant 1} C_n$ est une partie connexe et compacte de E.

On suppose donc que $C = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés de C tels que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

a) Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints (de E) ω_1 et ω_2 tels que $F_i \subset \omega_i$ (où $i \in \{1, 2\}$).

b) Montrer qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $C_{n_0} \subset \omega_1 \cup \omega_2$.

c) Conclure.