Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.
5/12/2016. Durée 1h20

Contrôle continu **2**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

<u>Cours.</u> (8 points =1+1+1+2+3)

1) Soit f continue sur $]\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$). Rappeler ce que signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ converge.

2) Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim \dfrac{k}{x^s}$ où s est un réel et $k \in \mathbb{R}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

3) Soit f continue sur $]0, 1]$. On suppose qu'au voisinage de 0, on a $f(x) \sim \dfrac{k}{x^s}$ où s est un réel et $k \in \mathbb{R}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

4) Préciser (et justifier) le domaine de définition de la fonction Γ: $\quad \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$

5) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge mais f n'a pas de limite en $+\infty$. On justifiera les affirmations de cet exemple.

<u>Exercice 1</u> (8 points)

Déterminer pour chacune des intégrales suivantes si elle converge ou diverge:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-t}{1+t^3+t^2}\,dt$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(t)\big)^{2016}}{1+t^2}\,dt$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{1}{\ln|\sqrt{x}-1|}\,dx$

<u>Exercice 2</u> (4 points)

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) Justifier la convergence de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx.$

2) Exprimer $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx.$

Indication: effectuer la changement de variable $t = \dfrac{a^2}{x}$

3) En déduire la valeur de $I(a)$.