Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.
24/04/2017. Durée 1h20

Contrôle continu **2**

VARIABLE COMPLEXE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (9 points=4,5+3+1,5)

1) a) Donner et justifier les inégalités de Cauchy (ou Cauchy-Liouville).

b) Enoncer le théorème de Liouville.

c) Démontrer le théorème de Liouville à partir de la question 1.a.

2) Énoncer le théorème des résidus (on précisera les notations et les termes utilisés, notamment ce qu'est un résidu).

3) Enoncer le théorème de Rouché.

Exercice 1 (2 points)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer (la convergence et) la limite de la suite de terme $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (où $n \geqslant 1$).

Exercice 2 (6 points)

Justifier rapidement la convergence puis calculer (par la méthode des résidus)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)^2}\,dx$$

Exercice 3 (3 points)

On pose $Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash Q$, on considère

$$f_n(z) = \frac{1}{z-n^2}$$

Montrer que $z \in \mathbb{C}\backslash Q \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ définit une fonction holomorphe.