Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2017-2018.
26/10/2017. Durée 1h30

Contrôle continu **1**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (12 points =1+2+1,5+1+(1+2)+(1+2,5))

1) Rappeler la définition de "La série de terme général u_n converge".

2) Compléter cet énoncé :*"Si la série de terme général u_n ... , alors la suite $(u_n)_n$ converge et* $\lim u_n = \ldots$*"*.
Puis démontrer ce résultat.

3) Énoncer la règle (le test) de Cauchy.

4) Énoncer le critère de Riemann (*i.e.* Quand une série de Riemann, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, converge ?).

5) Soit H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique:
a) Donner un équivalent de H_n.
b) Justifier le résultat.

6) Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ où $n \in \mathbb{N}$.
a) Justifier que la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.
b) On note alors $E(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ · Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $E(x)E(y) = E(x+y)$.

Exercices (8 points=2,5+1+2,5+2)

1) Soit $x \in [0, 1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - x\cos^2(\theta)}\, d\theta$.

2) Quelle est la nature de la série de terme général: $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n^3 + 2n + 7}$ où $n \in \mathbb{N}$.

3) La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n + (-1)^n}}$ (où $n \in \mathbb{N}$) est-elle convergente ? absolument convergente ?

4) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (où $n \geqslant 2$) diverge.