Licence de Mathématiques. Université d'Artois. 2016-2017.
24/10/2016. Durée 1h30

Contrôle continu **1**

SÉRIES - INTÉGRALES

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

<u>Cours.</u> (12,5 points =1,5+2+1+1+2+(1+4))

1) Énoncer la règle de d'Alembert.

2) Énoncer le critère spécial des séries alternées (en précisant le contrôle des restes partiels).

3) Énoncer le critère de Riemann (i.e. quand une série de Riemann, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, converge ?).

4) Soit H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique: donner un équivalent (sans preuve) de H_n.

5) Énoncer le théorème concernant le produit de deux séries.

6) Soit $b_n \geqslant 0$ le terme général d'une série divergente. On suppose que $a_n = o\big(b_n\big)$.

a) Compléter: on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \to ??$ et $\displaystyle\sum_{k=?}^{?} a_k = o\Big(\sum_{k=?}^{?} b_k\Big)$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Démontrer ce résultat.

<u>Exercices</u> (8,5 points=2,5+1,5+2+2,5)

1) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(x)}\,dx$.

2) La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$ (où $n \in \mathbb{N}$) est-elle convergente ? absolument convergente ?

3) Déterminer la nature de la série de terme général u_n où $u_n = e^{an^2}\Big(1 - \dfrac{a}{n}\Big)^{n^3}$ où $n \geqslant 1$ et $a > 0$.

4) On considère la série de Bertrand: $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ où $n \geqslant 2$.

a) Est-ce que la série de terme général u_n converge ?

b) On cherche à justifier la réponse et on considère $v_n = \ln\big(\ln(n)\big)$ pour $n \geqslant 2$.

(i) Déterminer un équivalent simple de $v_{n+1} - v_n$.

(ii) Conclure.