

Contrôle continu 1  
VARIABLE COMPLEXE

*Les calculatrices et les documents sont interdits.  
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours. (15 points=1,5+1,5+3+5+4)

- 1) Énoncer les relations de Cauchy-Riemann (on précisera les notations).
- 2) Énoncer le principe du maximum.
- 3) Énoncer le théorème de Cauchy local (sur un ouvert convexe).

Application: soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < 1$ . On considère le chemin  $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$  pour  $t \in [0, 1]$  et  $\text{Log}$  la détermination principale du logarithme. Que vaut

$$\int_{\gamma} \frac{\text{Log}(2+w)}{w-z} dw \quad ?$$

- 4) Énoncer le théorème de l'application ouverte (version holomorphe) et le démontrer.
- 5) Énoncer et démontrer le théorème d'holomorphie sous le signe somme.

Exercice (5 points=1+2,5+1,5)

Soit  $a \in \mathbb{D}$  (le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ ). On considère la fonction  $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ .

- (i) Montrer que  $\varphi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\partial\mathbb{D})$ .
- (ii) En utilisant le principe du maximum, justifier que  $\varphi_a(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ .
- (iii) Montrer que  $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .