

Contrôle continu 1
VARIABLE COMPLEXE

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours. (15 points=1,5+1,5+3+5+4)

- 1) Énoncer les relations de Cauchy-Riemann (on précisera les notations).
- 2) Énoncer le principe du maximum.
- 3) Énoncer le théorème de Cauchy local (sur un ouvert convexe).

Application: soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. On considère le chemin $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$ et Log la détermination principale du logarithme. Que vaut

$$\int_{\gamma} \frac{\text{Log}(2+w)}{w-z} dw \quad ?$$

- 4) Énoncer le théorème de l'application ouverte (version holomorphe) et le démontrer.
- 5) Énoncer et démontrer le théorème d'holomorphie sous le signe somme.

Exercice (5 points=1+2,5+1,5)

Soit $a \in \mathbb{D}$ (le disque unité ouvert de \mathbb{C}). On considère la fonction $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

- (i) Montrer que $\varphi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\partial\mathbb{D})$.
- (ii) En utilisant le principe du maximum, justifier que $\varphi_a(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$.
- (iii) Montrer que $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.