Examen - Session 2

CALCULUS 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

(Barème=4+2.5+3.5+4.5+6.5 points)

1) On veut résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\quad \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(3x) \qquad (**)$.

a) Rappeler ce que valent $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b) En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(3x) \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x).$$

c) Résoudre $(**)$.

2) Calculer les limites suivantes: $\quad \bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^3-2x^2}{2x^3+1} \qquad \bullet \displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

3) On considère $f(x) = \ln\big(2+\sin(x)\big)$.

a) Sur quel intervalle f est-elle dérivable ? Calculer f' sur cet intervalle.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse π.

4) On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt[5]{1+x}$.

a) Justifier que f est dérivable et calculer f'.

b) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis *(on prendra particulièrement soin à la rédaction pour justifier comment on applique ce théorème)*, montrer que

$$\text{Pour tous réels } a, b \text{ avec } 0 \leqslant a < b, \qquad \sqrt[5]{1+b} - \sqrt[5]{1+a} \leqslant \frac{b-a}{5(1+a)^{\frac{4}{5}}}\,.$$

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{n+2} - \sqrt[5]{n+1}$.

5) a) Calculer les intégrales suivantes:

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[1+\tan^2(x)\right] dx \qquad\qquad \bullet \int_0^1 x e^x \, dx$$

b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ en effectuant le changement de variable $x = \cos(t)$.