Examen - Session 1
CALCULUS 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

(Barème=3.5+3+2.5+5+6.5 points)

1) On veut résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(2x)$ $(**)$.

a) Rappeler ce que valent $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(2x) \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x).$$

c) Résoudre $(**)$.

2) Calculer les limites suivantes:

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x-2x^2}{3x^2-2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x)$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

3) On considère $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$.

a) Sur quel intervalle f est-elle dérivable ? Calculer f' sur cet intervalle.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

4) Soit f la fonction: $t \in]-1,+\infty[\longmapsto f(t) = \ln(1+t)$

a) Calculer $f'(t)$ pour $t \in]-1,+\infty[$, puis justifier que pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a $0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$.

b) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer: $\forall u \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

(on prendra particulièrement soin à la rédaction pour justifier comment on applique ce théorème)

c) En déduire que pour $x > 0$ et $\alpha \geqslant 0$, on a $\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x \leqslant \mathrm{e}^\alpha$.

d) (*Cette question n'utilise pas les précédentes*) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$ où $\alpha \geqslant 0$.

5) a) Calculer les intégrales suivantes:

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$

b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.