Examen - Session 1- Eléments de correction
CALCULUS 1

1) On veut résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\quad \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(2x) \quad (**)$.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) On a donc $\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\cos(2x) \iff \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \cos(2x)$. Mais $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. D'où le résultat.

c) On en déduit que $(**)$ est équivalent à $x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2k'\pi$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

D'une part $x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2k\pi \iff -2k\pi - \frac{\pi}{4} = x$. Bien sûr quand k décrit $\mathbb{Z}$, $-k$ décrit $\mathbb{Z}$ aussi donc on peut écrire que ceci est équivalent à $x = -\frac{\pi}{4} + 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$.

D'autre part $x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2k'\pi \iff 3x = \frac{\pi}{4} + 2k'\pi$. Ceci est équivalent à $x = \frac{\pi}{12} + 2k'\frac{\pi}{3}$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

Donc toutes les solutions sont les $-\frac{\pi}{4} + 2p\pi$ et $\frac{\pi}{12} + 2q\frac{\pi}{3}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.

2) $\frac{1 + x - 2x^2}{3x^2 - 2}$ est une fraction rationnelle. Pour le comportement en l'infini il suffit de regarder les termes de plus haut degré:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x - 2x^2}{3x^2 - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan\left(x\right) = +\infty$$

car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin\left(x\right) = 1$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos\left(x\right) = 0$ et $\cos\left(x\right) > 0$ sur $[0, \pi/2[$.

Pour $x > 0$, on a:

$$\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 4x} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$

en utilisant la quantité conjuguée.

Maintenant on remarque $\sqrt{x^2 + 4x} + x = x\left[\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1\right]$. Ainsi

$$\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{4}{2} = 2$.

3) On considère $f(x) = e^{\sin(x)}$.

a) f est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$$

b) On a besoin de $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$. Dès lors, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est:

$$Y = f'(0)(X - 0) + f(0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y = X + 1$$

4) Soit f la fonction $t \in]-1, +\infty[\longmapsto f(t) = \ln(1+t)$

a) On a $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ pour $t \in]-1, +\infty[$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ car $t + 1 \geqslant 1 > 0$, donc $\quad 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$.

b) On va appliquer l'inégalité des accroissements finis à f qui est dérivable (donc continue) sur $[0, +\infty[$, aux points $a = 0$ et $b = u$. Puisque $|f'|$ est majoré par 1 sur l'intervalle $[0, u] \subset [0, +\infty[$, on a :

$$|f(u) - f(0)| \leqslant 1.|u - 0|$$

soit ($f(0) = \ln(1) = 0$)

$$\ln(1 + u) = f(u) \leqslant |f(u)| \leqslant u$$

On pouvait aussi remarquer que la première inégalité est une égalité puisque $f(u) = \ln(1+u) \geqslant 0$ pour $u \geqslant 0$ (car $1 + u \geqslant 1$).

c) D'après la question précédente, pour $x > 0$ et $\alpha \geqslant 0$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right) \leqslant \frac{\alpha}{x} \cdot$$

Comme la fonction exp est croissante, on en déduit que

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)\right) \leqslant \exp\left(x \cdot \frac{\alpha}{x}\right) = e^{\alpha} .$$

d) cf cours.

5) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$ est bien définie car $x \in [0, 1] \mapsto \sqrt{x}$ est continue. De plus

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(cf cours)

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$ est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment. De plus

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \Big[-\ln\big(\cos(x)\big)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

car cos positive (strictement) sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

On conclut

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(2)$$

(cf TD - via intégration par parties) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx = 1.$

e) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On effectue le changement de variable $x = \sin(t)$.

L'application $t \in [0, \pi/4] \mapsto \varphi(t) = \sin(t) \in [0, 1/\sqrt{2}]$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\pi/4) = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Enfin, on a bien $\varphi([0, \pi/4]) = [0, 1/\sqrt{2}]$ (φ est continue, strictement croissante).

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)+1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)+1\,dt$$

car $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ car cos positive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

On obtient

$$I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\ .$$