Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
15 juin 2015.
Durée 3h

EXAMEN - session **2**
ANALYSE 4

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-Applications. (7 points)

1) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes (sans justification) et préciser le rayon de convergence.

(a) $z \longmapsto \dfrac{1}{z-a}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ (b) $x \longmapsto \sin(x)$ (c) $x \longmapsto \arctan(x)$

2) Énoncer les deux théorèmes de Dirichlet (sur les séries de Fourier).

3) Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I. On suppose que cette suite converge uniformément sur I vers $f : I \to \mathbb{R}$. Démontrer que f est continue.

<u>Exercice 1.</u> (3 points)

Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\, dxdy$ où $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mid x^2+y^2 < 1\right\}$

<u>Exercice 2.</u> (3 points)

On fixe $\lambda \in]0,\pi[$. Soit f la fonction 2π-périodique qui coincide avec la fonction indicatrice de $[-\lambda,\lambda]$ sur $[-\pi,\pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire

a) la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{\sin(\lambda n)}{n}\right)^2$ b) la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\lambda n)}{n}$

Exercice 3. (6 points)

1) On fixe un réel $x \in]-1,+1[$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \Big(\cos(t)\Big)^{2n}\, dt \qquad et \qquad F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos^2(t)}\, dt$$

puis calculer $F(x)$ pour $x \in]-1,+1[$.

Indication : on pourra faire le changement de variable $t \mapsto u = \tan(t)$.

2) Justifier que pour tout $x \in]-1,+1[$, on a $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$.

3) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence).

a) $x \longmapsto \big(1-x\big)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ *(sans justification)*

b) En déduire celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ *(on simplifiera les expressions)*

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de W_n.

Exercice 4. (2,5 points)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

1) Justifier la convergence simple de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On note alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

2) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer S' (à l'aide d'une série).