

EXAMEN ANALYSE 4- session 1

Eléments de correction

Cours-Applications.

cf cours.

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \in [0, 1] \mapsto e^{x \sin^2(t)}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale est bien définie et F est définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, $\Phi : (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto e^{x \sin^2(t)}$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(t, x)$ pour tout point $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ qui vaut

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(t, x) = \sin^2(t) e^{x \sin^2(t)}$$

De plus $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto \sin^2(t) e^{x \sin^2(t)}$ est clairement continue.

Ainsi, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ (sur $\mathbb{R}$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^1 \sin^2(t) e^{x \sin^2(t)} dt$$

Exercice 2.

L'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y \cos(y^3 x)$ est continue. Par ailleurs, on voit facilement que $\mathcal{D}$ est inclus dans $[0, 1] \times [0, 1]$ (compact) donc l'intégrale est bien définie.

L'application $(x, y) \in \mathcal{D} \mapsto (x^2/y; y^4/x)$ envoie $\mathcal{D}$ dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$ par définition de $\mathcal{D}$. De plus, elle est bijective de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1[\times]0, 1[$. En effet pour $(u, v) \in]0, 1[\times]0, 1[$, le problème $u = \frac{x^2}{y}$ et $v = \frac{y^4}{x}$ est équivalent à $x = u^{4/7} v^{1/7}$ et $y = u^{1/7} v^{2/7}$, de plus (x, y) est alors bien dans $\mathcal{D}$ par définition. Enfin les applications $(x, y) \mapsto (u, v)$ et $(u, v) \mapsto (x, y)$ sont $\mathcal{C}^1$ donc $(x, y) \mapsto (x^2/y; y^4/x)$ réalise bien un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

Le déterminant de la matrice jacobienne de $(u, v) \in]0, 1[\times]0, 1[\mapsto (u^{4/7} v^{1/7}, u^{1/7} v^{2/7})$ vaut $\frac{1}{7u^{2/7} v^{4/7}}$.

On note par la suite $\Delta =]0, 1[\times]0, 1[$ et on applique alors la formule de changement de variable

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y \cos(y^3 x) dx dy = \iint_{\Delta} u^{9/7} v^{4/7} \cos(uv) \cdot \frac{1}{7u^{2/7} v^{4/7}} du dv = \frac{1}{7} \iint_{\Delta} u \cos(uv) du dv$$

D'après le théorème de Fubini, cela vaut encore

$$\frac{1}{7} \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} u \cos(uv) dv \right) du$$

Comme u fixé, $\int_{]0,1[} u \cos(uv) dv = \int_0^1 u \cos(uv) dv = \left[\sin(uv) \right]_0^1 = \sin(u)$, on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y \cos(y^3 x) dx dy = \frac{1}{7} \int_0^1 \sin(u) du = \frac{1 - \cos(1)}{7}.$$

Exercice 3.

cf T.D.

Exercice 4.

1) On fixe un réel $x \in]-1, +1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Les intégrales sont bien définies comme intégrales de fonctions continues sur un segment. En effet, c'est évident concernant W_n d'une part. D'autre part, $t \in [0, \pi/2] \mapsto \frac{1}{1 - x \cos^2(t)}$ est continue puisque $1 - x \cos^2(t)$ ne s'annule pas car $|x| < 1$.

En effectuant le changement de variable proposé, on obtient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2 - x} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + (\sqrt{1-x})^2} du = \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-x}} \right) \right]_0^{+\infty}$$

donc

$$F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}.$$

2) Pour $x \in]-1, +1[$ fixé, on a pour tout $t \in [0, \pi/2]$: $|x \cos^2(t)| \leq |x| < 1$ donc

$$\frac{1}{1 - x \cos^2(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x \cos^2(t))^n$$

De plus, la série de fonctions $t \mapsto (x \cos^2(t))^n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, \pi/2]$. En effet, on a pour tout $t \in [0, \pi/2]$ et tout entier n :

$$|(x \cos^2(t))^n| \leq |x|^n$$

qui est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $|x| < 1$).

Ainsi on peut intervertir signe somme et intégrale et cela donne

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (x \cos^2(t))^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (x \cos^2(t))^n dt$$

soit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n.$$

3) cf cours.

4) On a finalement pour tout $x \in]-1, +1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n.$$

Par unicité du DSE, on obtient que pour tout entier n :

$$W_n = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}.$$

Exercice 5.

1) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, on a $\frac{1}{1+n^2x} \approx \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann). On aurait pu aussi simplement dire que $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$ et conclure de même. Donc $S(x)$ est bien défini.

2) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et leur dérivée vaut $f'_n(x) \frac{-n^2}{(1+n^2x)^2}$. Or la série de fonction $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ où $a > 0$ fixé. En effet, on a

$$\sup_{x>a} |f'_n(x)| = \frac{n^2}{(1+n^2a)^2} \leq \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

D'après le théorème du cours sur la dérivation des séries de fonctions, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$ et pour $x > a$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2x)^2}.$$

Tout ceci est valable pour $a > 0$ arbitraire. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, on choisissant $a \in]0, x_0[$, on obtient que S est de classe $\mathcal{C}^1$ au point x_0 (puisque sur $]a, +\infty[$) et que

$$S'(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2x_0)^2}.$$