

Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
17 juin 2014.
Durée 3h

EXAMEN - session 2
ANALYSE 4

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours-Applications. (9 points)

1) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence.

(a) $\operatorname{ch}(x)$ (b) $\sin(x)$ (c) $\frac{x}{(1-x)^2}$ (d) $\arcsin(x)$

2) Déterminer la limite de la suite suivante (justifier au passage son existence), définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)(n^2+k^2)}$.

3) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On considère $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^1 f(t)e^{-xt} dt$

Montrer que F est effectivement définie et de classe $\mathcal{C}^1$. Que vaut sa dérivée ?

4) Soient I un intervalle (non trivial) et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I : $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que cette suite converge uniformément, sur I , vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

- a) Que peut-on dire de f ?
- b) Démontrer ce résultat.

Exercice 1. (5 points)

On fixe $u \in]0, \pi[$ et on considère la fonction 2π -périodique f qui coïncide avec la fonction indicatrice de $[-u, u]$ sur $[-\pi, \pi[$ (autrement dit la fonction qui vaut 1 sur $[-u, u]$ et 0 sur $[-\pi, \pi[\setminus [-u, u]$).

1) Calculer les coefficients de Fourier de f .

2) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(nu)}{n} \right)^2$.

3) Retrouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4) En intégrant la relation obtenu au 2. sur $[0, \pi/2]$, trouver $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

Exercice 2. (3 points)

Calculer

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x+y}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)} dx dy$$

où

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x+y \leq \sqrt{2} \text{ et } x^2+y^2 \geq 1 \right\}$$

Exercice 3. (3 points)

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômes (réels), uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que nécessairement la limite est un polynôme.

1) Écrire le critère de Cauchy uniforme.

2) En déduire qu'à partir d'un certain rang N , les polynômes P_n et P_N diffèrent d'une constante : autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_N + a_n$.

3) Conclure.

Exercice 4. (5 points)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{2n^\alpha x}{1+n^2 x^2}$$

1) Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ en fonction de α .

2) On suppose que $\alpha < 2$.

a) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de α .

b) Etudier la convergence simple de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de α .

c) Etudier la convergence normale de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de α .

d) On suppose que $\alpha \in [0, 2[$. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x \geq 0$.

(i) Pour tout $N \geq 1$, justifier que $S\left(\frac{1}{N}\right) \geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{2}{1 + \frac{n^2}{N^2}}$.

(ii) En déduire pour quels α la convergence de la série est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.