Licence de Mathématiques. Université d'Artois.

ANALYSE 4 - EXAMEN - session **1**
Élements de correction

Cours-Applications.

1) Cf cours.

2) Cf TD

3) a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [1,2]$, on a $\dfrac{t}{x^2+t} \in [0,1]$, de plus l'application $t \in [1,2] \longmapsto f\Big(\dfrac{t}{x^2+t}\Big)$ est continue. Donc $F(x)$ est définie.

b) Pour tout $t \in [1,2]$ fixé, l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \Phi(t,x) = f\Big(\dfrac{t}{x^2+t}\Big)$ est dérivable (en fait $\mathscr{C}^1$) et sa dérivée vaut

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi(t,x) = \Big(\frac{-2xt}{(x^2+t)^2}\Big) f'\Big(\frac{t}{x^2+t}\Big)$$

de plus $(t,x) \in [1,2] \times \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi(t,x)$ est continue (comme composée d'applications continues, puisque f' est continue).

Ainsi F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{-2xt}{(x^2+t)^2} f'\Big(\frac{t}{x^2+t}\Big)\, dt.$$

Autre méthode : On pouvait aussi commencer par faire un changement de variable (pour x non nul) : $u = \dfrac{t}{x^2+t}$ pour se ramener à des fonctions définies comme intégrales dépendant de la borne supérieure.

4) Cf cours.

<u>Exercice 1.</u>

1) On décompose en éléments simples :

$$\frac{x\sin(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2} = \frac{x\sin(\alpha)}{\big(1-x\mathrm{e}^{i\alpha}\big)\big(1-x\mathrm{e}^{-i\alpha}\big)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{i\alpha}} - \frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-i\alpha}}\right).$$

Chacune des fractions est développables en série avec pour rayon de convergence 1 puisque $\mathrm{e}^{i\alpha}$ et $\mathrm{e}^{-i\alpha}$ sont de module 1. On a pour tout $x \in]-1,+1[$

$$\frac{x\sin(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{in\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-in\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\sin(n\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\sin(n\alpha).$$

Le raisonnement donne un rayon de convergence égal au moins à 1 mais il ne peut être supérieur à 1 car la fonction n'est pas continue sur un disque ouvert contenant le disque unité fermé : elle serait alors continue en $e^{i\alpha}$ ce qui est faux. Donc le rayon de convergence égal à 1.

2) On fixe $x \in]-1,+1[$ donc la série de fonctions $\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin(n\alpha)$ converge normalement (puisque le module de chaque fonction est x^n, terme général d'une série géométrique de raison x). On a donc convergence uniforme sur $[0,b]$ et on peut intervertir signe somme et intégral :

$$\int_0^b \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin(n\alpha)\, d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^b x^n \sin(n\alpha)\, d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \int_0^b \sin(n\alpha)\, d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{1-\cos(nb)}{n}.$$

D'une part, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{1}{n} = -\ln(1-x)$, d'autre part

$$\int_0^b \frac{x\sin(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}\, d\alpha = \frac{1}{2}\left(\ln(1-2x\cos(b)+x^2) - \ln(1-2x+x^2)\right)$$

soit

$$\int_0^b \frac{x\sin(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}\, d\alpha = \frac{1}{2}\ln(1-2x\cos(b)+x^2) - \ln(1-x).$$

On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\cos(nb)}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos(b)+x^2) = -\ln\left|1-xe^{ib}\right|.$$

<u>Exercice 2.</u> (3 points)

On intègre une fonction continue sur un domaine compact du plan. On effectue la changement de variable en coordonnées polaires et on obtient

$$\mathscr{I} = \iint_{\mathscr{D}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_{\Delta} \frac{r(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{r^2}\, rdrd\theta$$

avec $\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\pi/2] \mid r(\cos(\theta)+\sin(\theta)) \leqslant \sqrt{2} \quad et \quad r^2 \geqslant 1\right\}$.

Donc

$$\mathscr{I} = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\sqrt{2}/(\cos(\theta)+\sin(\theta))} \cos(\theta)+\sin(\theta)\, dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} - (\cos(\theta)+\sin(\theta))\, d\theta$$

donc

$$\mathscr{I} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - 2.$$

<u>Exercice 3.</u>

1) On a $\hat{f}(0) = \dfrac{\theta}{\pi}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$, non nul : $\hat{f}(n) = \dfrac{\sin(n\theta)}{n\pi}$.

2) En appliquant le théorème de Dirichlet (f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux) en 0 (où f est continue), on obtient (en tenant compte de la parité des $\hat{f}(n)$)

$$\frac{\theta}{\pi} + 2 \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n\pi} = 1$$

d'où

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2} \cdot$$

En appliquant Parseval, on obtient

$$\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 + 2 \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\sin(n\theta)}{n\pi}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{\theta}{\pi}$$

donc

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\right)^2 = \frac{\theta(\pi - \theta)}{2} \cdot$$

<u>Exercice 4.</u>

1) Pour $x = 0$, la série converge trivialement. Pour x non nul, on a $f_n(x) \sim \dfrac{2}{xn^{2-\alpha}}$ donc la série (de signe constant) converge si et seulement $2 - \alpha > 1$ soit $\alpha < 1$.

2) On se place déjà dans le cas où $\alpha < 1$ (sinon il n'y a pas convergence simple de la série de fonctions donc pas convergence normale). En étudiant la fonction, on obtient facilement que $\sup\limits_{x \geqslant 0} \left|f_n(x)\right| = f_n(1/n) = \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$ donc la convergence est normale si et seulement c'est le terme général d'une série convergente i.e. $1 - \alpha > 1$ soit $\alpha < 0$.