Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
19/06/2013.
Durée 3h

EXAMEN - session **2**
ANALYSE 4

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-Applications. (4,5 points=3+1,5)

1) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence.

(a) $\sin(x)$ (b) $\ln(1-x)$

(c) $\exp(x^2)$ (d) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

2) Énoncer le théorème de Dirichlet dans le cas d'une fonction (périodique) de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Exercice 1. (2,5 points)

Calculer
$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2+2xy+1\right)^2}\,dxdy \quad \text{où } \mathscr{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y \geqslant 0 \quad et \quad x^2+y^2 \leqslant 1\Big\}.$$

Exercice 2. (4 points=1,5+2,5)

On se propose dans cet exercice de calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$.

Pour cela, on introduit
$$S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Comme d'habitude, on note $j = e^{2i\pi/3}$.

a) Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et en déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.

b) En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 3. (11 points=(1+1,5)+(1+1,5+1,5+3+1) +0,5))

1) Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.

a) Déterminer les coefficients de Fourier de f

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2) On définit $\theta(t) = t\ln(t)$ pour $t \in]0,1]$ et $\theta(0) = 0$. On fixe $\rho \in]0,1[$.

a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \rho^n t^n \theta(t)$ converge normalement sur $[0,1]$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n\theta(t)\, dt = -\frac{1}{(n+2)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\theta(t)}{1-\rho t}\, dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n+2)^2}$.

d) On veut montrer que la fonction $r \in [0,1] \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\theta(t)}{1-rt}\, dt$ est continue.

(i) Montrer que la fonction $r \in [0,1] \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\theta(t)}{1-rt}\, dt$ est bien définie.

(ii) Montrer que la fonction $r \in [0,1[\longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\theta(t)}{1-rt}\, dt$ est continue.

(iii) Montrer que pour tout $r \in [0,1[$, on a

$$\left| \int_0^1 \frac{\theta(t)}{1-rt}\, dt - \int_0^1 \frac{\theta(t)}{1-t}\, dt \right| \leqslant \sqrt{1-r} \int_0^1 \frac{|\theta(t)|}{(1-t)^{3/2}}\, dt.$$

(iv) Conclure.

e) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{1-t}\, dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$.

3) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{1-t}\, dt$?