Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
03/06/2015.
Durée 3h

EXAMEN - session **2**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours/applications. (5 points))

1) On définit pour tout polynôme (à coefficients réel) P de degré au plus d (où $d \geqslant 1$) :

$$\|P\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P(n)|}{(n+1)^d}.$$

a) Justifier que $\|P\|$ a bien un sens puis montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on ait

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P(n)|}{(n+1)^d} \leqslant \alpha \sup_{t\in[-1,1]} \left|P(t)\right|$$

2) Montrer qu'une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme quelconque $\|\cdot\|$) est ouverte.

<u>Exercice 1.</u> (6 points)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On note $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) On suppose que V est d'intérieur non vide.

a) Rappeler la définition de l'intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $V = \mathbb{R}^n$.

2) a) Rappeler la définition de l'adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$. On donnera une caractérisation séquentielle de l'adhérence.

b) Montrer que l'adhérence $\overline{V}$ de V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que $\overline{V} = V$. *(Indication : on pourra par exemple considérer une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée au problème puis les formes linéaires coordonnées associées (i.e. la base duale))*

Exercice 2. (4,5 points)

Étudier et tracer la courbe paramétrée $\gamma = (x, y)$ avec $\begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra exploiter la périodicité et comparer $\gamma(t)$ avec $\gamma(\pi - t)$ pour réduire l'intervalle d'étude à $\big[-\pi/2, \pi/2\big]$.

On prêtera une attention particulière au point de paramètre $t = 0$.

Exercice 3. (4 points)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère $\Phi(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } (x,y) = \vec{0} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\big|\Phi(x, y)\big| \leqslant \|(x, y)\|_2^2$ et en déduire que Φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les dérivées partielles de Φ en $(x, y) \neq \vec{0}$.

3) Calculer les dérivées partielles de Φ en $\vec{0}$.

4) Est-ce que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. (3 points)

On se place dans $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme $\|\cdot\|$). On rappelle que lorsque A est une partie non vide de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $d(x, A)$ désigne la distance de x à une partie A de $\mathbb{R}^d$.

On considère une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^d$ et un compact (non vide) $K \subset \Omega$. Enfin pour $\varepsilon > 0$, on note

$$K_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, K) \leqslant \varepsilon\big\}$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.