Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
19/12/2014.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours/applications. (7 points=2,5+(1+1)+1+1,5))

1) Longueur d'une courbe de classe $\mathscr{C}^1$.

(i) Définition

(ii) Exprimer la longueur en fonction d'une intégrale.

(iii) Calculer la longueur de la courbe définie par $x = y^2$ pour $0 \leqslant y \leqslant 1$. *Indication : par exemple, on se souviendra que* $ch^2(t) = 1 + sh^2(t)$ *et que* $2ch^2(t) = ch(2t) + 1$.

2) On définit pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ (où $d \geqslant 1$) :

$$N\big(\vec{x}\big) = \sup_{t\in[-1,1]} \Big|\sum_{j=1}^{d} x_j t^j\Big|.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

b) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on ait

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant d} \big|x_j\big| \leqslant \alpha \sup_{t\in[-1,1]} \Big|\sum_{j=1}^{d} x_j t^j\Big|$$

3) Rappeler la définition d'un compact de $\mathbb{R}^n$.

4) Montrer qu'une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est fermée.

<u>**Exercice 1.**</u> (3 points=0,5+1+0,5+1)

On se place dans $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme $\|\cdot\|$).
On dira dans cet exercice qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la propriété $\mathscr{C}$ si

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \qquad n, m \geqslant N_0 \Longrightarrow \big\|x_m - x_n\big\| \leqslant \varepsilon$$

1) Montrer qu'une suite convergente a la propriété $\mathscr{C}$.

2) On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la propriété $\mathscr{C}$

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) En déduire qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_j) et un $\ell \in \mathbb{R}^d$ tels que $\big(x_{n_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ.

c) Conclure que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ.

Exercice 2. (4,5 points)

Étudier et tracer la courbe paramétrée $\gamma = (x, y)$ avec $\begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra exploiter la périodicité et comparer $\gamma(t)$ avec $\gamma(\pi - t)$ pour réduire l'intervalle d'étude à $\big[-\pi/2, \pi/2\big]$.

On prêtera une attention particulière au point de paramètre $t = 0$.

Exercice 3. (5,5 points=1,5+1+1+0,5+1,5)

Soit f la fonction $\mathscr{C}^1$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4 \end{array}$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

2) Quels sont les points critiques ?

3) Déterminer les extrema locaux de f.

4) Montrer que $f(x,y) \leqslant 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$.

5) Justifier que f admet un maximum dans le disque de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ et que cela correspond à un maximum global. Y a t-il un minimum sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. (2 points)

On se place dans $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme $\|\cdot\|$). On considère une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^d$ et un compact (non vide) $K \subset \Omega$. Enfin pour $\varepsilon > 0$, on note

$$K_\varepsilon = \big\{ x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, K) \leqslant \varepsilon \big\}$$

où $d(x, A)$ désigne la distance de x à une partie A de $\mathbb{R}^d$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.