Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
18/12/2013.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours/applications. (9 points=2,5+(1,5+1,5)+(1+1+1,5))

1) Longueur d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$.

(i) Définition

(ii) Exprimer la longueur en fonction d'une intégrale.

(iii) Calculer la longueur d'un "tour" de spirale logarithmique :

$$\vec{\gamma}\ \left|\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(e^t\cos(t), e^t\sin(t)\right) \end{array}\right.$$

2) On définit pour tout $\vec{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ (où $d\geqslant 1$) :

$$N(\vec{x}) = \int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=1}^{d} x_j t^j\right| dt.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

b) Justifier qu'il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout $(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, on ait

$$\sum_{j=1}^{d}|x_j| \leqslant \alpha\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=1}^{d} x_j t^j\right| dt$$

3) a) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition d'une application $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^m$, tous les deux non vides.

(i) Donner la définition d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de Ω sur Ω'.

(ii) Justifier que s'il existe un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme Ω sur Ω' alors $n=m$.

Exercice 1. (5 points=1+1+1+(1+1))

Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme $\|\cdot\|$).
On rappelle que $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$.

1) On suppose ici que A et B sont bornés. Montrer que $A+B$ est borné.

2) On suppose que B est ouvert. Montrer que $A+B$ est ouvert.

(*Indication : on pourra considérer un élément $a+b$ de $A+B$ et utiliser en b le caractère ouvert de B*).

3) On suppose que A et B sont compacts. Montrer que $A+B$ est compact.

4) On suppose que A est fermé et B est compact.

a) Montrer que $A+B$ est fermé.
(*Indication : on pourra considérer une suite* $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $A+B$ *convergente vers* $x\in\mathbb{R}^d$. *Écrire* x_n *sous la forme* a_n+b_n *et exploiter la compacité de* B).

b) On suppose que A et B sont des compacts. Retrouver une preuve de (3) en utilisant les questions précédentes (sauf (3) bien sûr).

Exercice 2. (5 points=2,5+1+1,5)

Soit f la fonction $\mathcal{C}^1$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y\Big(x^2+(\ln y)^2\Big) \end{array}$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

2) Quels sont les points critiques ?

3) Déterminer les extrema de f.

Exercice 3. (4 points)

Etudier la courbe définie par l'équation polaire $\rho=\dfrac{1+2\cos(\theta)}{1+2\sin(\theta)}$ pour $\theta\in\,\big]-\pi/6,7\pi/6\big[$.

(on ne cherchera pas à préciser le point double)